函数与导数

例 1　已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$为 $f(x)$的导数，证明：

(1)$f'(x)$在区间$\left(-1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上存在唯一极大值点；

(2)$f(x)$有且仅有 2 个零点.

审题路线图

(1)设 $g(x)=f'(x)$→对 $g(x)$求导→得出 $g(x)$的单调性，得证

(2)对 x 进行讨论→分四个区间$(-1,\ 0]$，$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$，$(\pi,\ +\infty)$，根据用导数判断函数单调性来确定零点个数

规 范 解 答 分 步 得 分	构 建 答 题 模 板
证明　(1)设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$，$g'(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$. ……………………………………………………2 分 当 $x\in\left(-1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)$单调递减，…………………………3 分 而 $g'(0)>0$，$g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$，可得 $g'(x)$在$\left(-1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$有唯一零点，设为 α. 则当 $x\in(-1,\ \alpha)$时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\alpha,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$. 所以 $g(x)$在$(-1,\ \alpha)$上单调递增，在$\left(\alpha,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递减，…………4 分 故 $g(x)$在$\left(-1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上存在唯一极大值点， 即 $f'(x)$在$\left(-1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上存在唯一极大值点. ………………5 分 (2)$f(x)$的定义域为$(-1,\ +\infty)$. ……………………………6 分 ①当 $x\in(-1,0]$时，由(1)知，$f'(x)$在$(-1,0)$上单调递增.而 $f'(0)=0$， 所以当 $x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递减. 又 $f(0)=0$，从而 $x=0$ 是 $f(x)$在$(-1,0]$上的唯一零点；…………7 分 ②当 $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$时，由(1)知，$f'(x)$在$(0,\ \alpha)$上单调递增，在$\left(\alpha,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递减， 而 $f'(0)=0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$， 所以存在 $\beta\in\left(\alpha,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\beta)=0$，且当 $x\in(0,\ \beta)$时，$f'(x)>0$； 当 $x\in\left(\beta,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$.	第一步 **求导数**：对复杂函数性质的讨论，可通过二次求导. 第二步 **看性质**：通过导函数的符号确定函数的单调性，结合草图分析函数的零点、极值等性质. 第三步 **找联系**：寻找要求结论和函数性质的联系，通过所得函数性质解决所

故 $f(x)$在$(0，\beta)$上单调递增，在$\left(\beta，\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减. ……………………………8 分 又 $f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)>0$， 所以当 $x\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)>0$. 从而，$f(x)$在$\left(0，\frac{\pi}{2}\right]$上没有零点；……………………………………………9 分 ③当 $x\in\left(\frac{\pi}{2}，\pi\right]$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2}，\pi\right)$上单调递减.而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$f(\pi)<0$， 所以 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2}，\pi\right]$上有唯一零点；……………………………………………10 分 ④当 $x\in(\pi，+\infty)$时，$\ln(x+1)>1$， 所以 $f(x)<0$，从而 $f(x)$在$(\pi，+\infty)$上没有零点. ……………………………11 分 综上，$f(x)$有且仅有 2 个零点. ……………………………………………………12 分	求问题. 第四步 **规范答**：审视思路，规划并书写规范步骤.

评分细则　第(1)问：对函数 $f(x)$两次求导给 2 分；判断出新函数 $g'(x)$的单调性给 1 分；确定 $g(x)$存在唯一极大值点给 1 分；结论给 1 分.

第(2)问：求出 $f(x)$定义域给 1 分；确定区间$(-1,0]$上的零点个数给 1 分；确定区间$\left(0，\frac{\pi}{2}\right]$上的零点个数给 2 分，确定区间$\left(\frac{\pi}{2}，\pi\right]$上的零点个数给 1 分；确定区间$(\pi，+\infty)$上的零点个数给 1 分；结论给 1 分.

跟踪演练　已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性，并证明 $f(x)$有且仅有两个零点；

(2)设 x_0 是 $f(x)$的一个零点，证明：曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0，\ln x_0)$处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.

(1)**解**　$f(x)$的定义域为$(0,1)\cup(1，+\infty)$.

因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$，所以 $f(x)$在$(0,1)$，$(1，+\infty)$上单调递增.

因为 $f(e)=1-\frac{e+1}{e-1}<0$，$f(e^2)=2-\frac{e^2+1}{e^2-1}=\frac{e^2-3}{e^2-1}>0$，所以 $f(x)$在$(1，+\infty)$上有唯一零点 x_1，即 $f(x_1)=0$.

又 $0<\frac{1}{x_1}<1$，$f\left(\frac{1}{x_1}\right)=-\ln x_1+\frac{x_1+1}{x_1-1}=-f(x_1)=0$，故 $f(x)$在$(0,1)$上有唯一零点$\frac{1}{x_1}$.

综上，$f(x)$有且仅有两个零点.

(2)**证明**　因为$\frac{1}{x_0}=e^{-\ln x_0}$，故点 $B\left(-\ln x_0，\frac{1}{x_0}\right)$在曲线 $y=e^x$ 上.

由题设知 $f(x_0)=0$，即 $\ln x_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$，连接 AB，则直线 AB 的斜率

$$k=\frac{\frac{1}{x_0}-\ln x_0}{-\ln x_0-x_0}=\frac{\frac{1}{x_0}-\frac{x_0+1}{x_0-1}}{-\frac{x_0+1}{x_0-1}-x_0}=\frac{1}{x_0}.$$

曲线 $y=e^x$ 在点 $B\left(-\ln x_0, \frac{1}{x_0}\right)$处切线的斜率是$\frac{1}{x_0}$，曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0, \ln x_0)$处切线的斜率也是$\frac{1}{x_0}$，所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0, \ln x_0)$处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.