江苏省仪征中学 2019 届高三上学期数学(文)周末限时训练 1（2018.9.8）

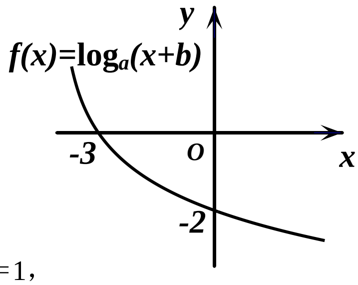
范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、复数

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分．

1、若复数 $z=\dfrac{1+3i}{1-i}$(i 为虚数单位)，则 $|z|=$ ▲ .

2、已知集合 $A=\{2+\sqrt{a},a\}$，$B=\{-1,1,3\}$，且 $A\subset B$，则实数 a 的值是 ▲ .

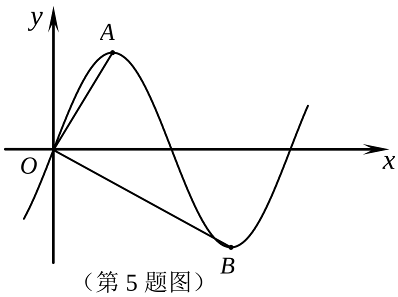
3、已知函数 $f\left(x\right)=\log_a\left(x+b\right)$（$a>0,a\neq1,b\in\mathrm{R}$）的图像如图所示，则 $a+b$ 的值是 ▲ .



4、已知向量 $\boldsymbol{m}=(\cos\alpha，\sin\alpha)$，$\boldsymbol{n}=(2，1)$，$\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，若 $\boldsymbol{m}\ \boldsymbol{n}=1$，

则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)=$ ▲ .

5、如图，已知 A，B 分别是函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x(\omega>0)$在 y 轴右侧图象上的第一个最高点和第一个最低点，且$\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$，则该函数的周期是 ▲ .



（第 5 题图）

6、若命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+(a-1)x+1<0$”是真命题，则实数 a 的取值范围是 ▲ .

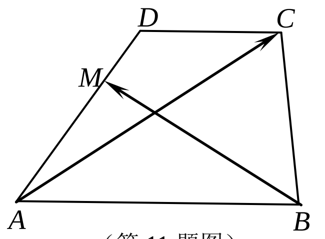
7、已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^x-3, x>0,\\ g\left(x\right), x<0,\end{cases}$是奇函数，则 $f\left(g\left(-2\right)\right)=$ ▲ .

8、已知平面向量 $\vec{a}=(2,1),\vec{a}\cdot\vec{b}=10$，若 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=5\sqrt{2}$，则 $\left|\vec{b}\right|$ 的值是 ▲ .

9、若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-1\geqslant0,\\ x-y\leqslant0,\\ x+y-4\leqslant0,\end{cases}$ 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为 ▲ .

10、已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+4$，若 $f(x)$的图象与 x 轴正半轴有两个不同的交点，则实数 a 的取值范围为 ▲ .

11、如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB // CD$，$AB=4$，$AD=3$，$CD=2$，$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MD}$．若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BM}=-3$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$____▲____.



（第 11 题图）

12、已知正实数 x，y 满足 $x+y+3=xy$，若对任意满足条件的 x，y 都有$(x+y)^2-a(x+y)+1\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

13、在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 ΔABC 为锐角三角形，且满足 $b^2-a^2=ac$，则 $\dfrac{1}{\tan A}-\dfrac{1}{\tan B}$ 的取值范围是____▲____.

14、已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2-3x, & x\leq 0,\\ e^x+e^2, & x>0.\end{cases}$ 若不等式 $f(x)\geq kx$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是____▲____.

二、解答题：本大题共 6 小题，共 90 分．解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15、(本小题满分 14 分) 在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a, b, c，且 $\sin A+\cos^2\dfrac{B+C}{2}=1$，D 为 BC 上一点，且 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

（1）求 $\sin A$ 的值；

（2）若 $a=4\sqrt{2}, b=5$，求 AD 的长.

16、(本小题满分 14 分) 已知 p：$\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leq 2$，$q$：$x^2-2x+1-m^2\leq 0(m>0)$，且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件，求实数 m 的取值范围.

17、(本小题满分 14 分) 已知 $a>0$，函数 $f(x)=-2a\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2a+b$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$-5\leq f(x)\leq 1$.

(1)求常数 a，b 的值；

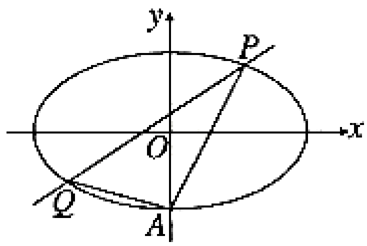
(2)设 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$且 $\lg g(x)>0$，求 $g(x)$的单调区间.

18、(本小题满分 16 分) 如图，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(0,-1)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

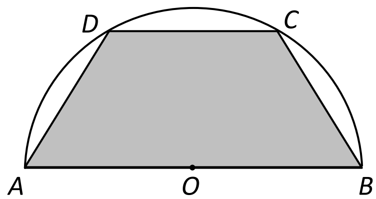
(1)求椭圆 E 的方程；

(2)经过点 $(1,1)$ 的直线与椭圆 E 交于不同两点 P,Q（均异于点 A），

证明：直线 AP 与 AQ 的斜率之和为定值



19、(本小题满分 16 分) 如图所示，有一块半径长为 1 米的半圆形钢板，现要从中截取一个内接等腰梯形部件 $ABCD$，设梯形部件 $ABCD$ 的面积为 y 平方米.



(1)按下列要求写出函数关系式：

①设 $CD=2x$(米)，将 y 表示成 x 的函数关系式；

②设 $\angle BOC=\theta(rad)$，将 y 表示成 θ 的函数关系式.

(2)求梯形部件 $ABCD$ 面积 y 的最大值.

20、(本小题满分 16 分) 已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(a+1)x^2+x-\dfrac{1}{3}$（$a\in\mathbf{R}$）.

（1）若 $a<0$，求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）当 $a\le 1$ 时，判断函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,2\right]$ 上零点的个数.

江苏省仪征中学2018届高三上学期数学(文)周末限时训练1答案

1、$\sqrt{5}$； 2、1； 3、$\frac{9}{2}$； 4、$-\frac{7}{25}$； 5、4； 6、$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$； 7、1；

8、5； 9、3； 10、$(3,+\infty)$； 11、$\frac{3}{2}$； 12、$\left(-\infty,\frac{37}{6}\right]$；

13、$(1,\frac{2\sqrt{3}}{3})$；14、$[-3,e^2]$。

15、

解：（1）$\because \sin A+\cos^2\frac{B+C}{2}=1$，

$\therefore \sin A+\frac{1+\cos(B+C)}{2}=1$， 即 $2\sin A-\cos A=1$， ……………………2分

$\therefore (2\sin A-1)^2=\cos^2 A$， 即 $5\sin^2 A-4\sin A=0$， ……………………4分

$\because A\in(0,\pi)$， $\therefore \sin A>0$，

$\therefore \sin A=\frac{4}{5}$， $\cos A=\frac{3}{5}$． ……………………6分

（2）在△ABC中，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$\therefore 32=25+c^2-2\times5c\times\frac{3}{5}$ 即 $c^2-6c-7=0$ 解得 $c=7$， ……………………10分

$\because \overline{AD}=\frac{1}{4}\overline{AB}+\frac{3}{4}\overline{AC}$，

$\therefore \overline{AD}^2=\frac{1}{16}c^2+\frac{9}{16}b^2+\frac{3}{8}bc\cos A=\frac{49}{16}+\frac{9}{16}\times25+\frac{3}{8}\times7\times5\times\frac{3}{5}=25$， ……………12分

$\therefore AD=5$． ……………………14分

16、解:由q：$x^2-2x+1-m^2\le0$，得 $1-m\le x\le1+m$，

$\therefore \neg q$：A＝$\{x|x>1+m$ 或 $x<1-m，m>0\}$，

由p：$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\le2$，解得 $-2\le x\le10$，$\therefore \neg p$：B＝$\{x|x>10$ 或 $x<-2\}$．

$\because \neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件．

$\therefore A\subsetneqq B$，

$\therefore \begin{cases}m>0\\1-m<-2\\1+m\ge10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m>0\\1-m\le-2\\1+m>10\end{cases}$，即 $m\ge9$ 或 $m>9$．$\therefore m\ge9$．

17、解　(1)∵$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，∴$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.∴$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，又∵$a>0$，

∴$-2a\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in[-2a,a]$．∴$f(x)\in[b,3a+b]$，

又∵$-5\le f(x)\le 1$，∴$b=-5,3a+b=1$，因此 $a=2$，$b=-5$.

(2)由(1)得 $a=2$，$b=-5$，∴$f(x)=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$，

$g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-4\sin\left(2x+\frac{7\pi}{6}\right)-1=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$，

又由 $\lg g(x)>0$，得 $g(x)>1$，

∴$4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1>1$，∴$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)>\frac{1}{2}$，∴$2k\pi+\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{6}<2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

其中当 $2k\pi+\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$g(x)$单调递增，即 $k\pi<x\le k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

∴$g(x)$的单调增区间为$\left(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

又∵当 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{6}<2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$g(x)$单调递减，即 $k\pi+\frac{\pi}{6}<x<k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

∴$g(x)$的单调减区间为$\left(k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

综上，$g(x)$的递增区间为$\left(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$$(k\in\mathbf{Z})$；递减区间为$\left(k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$(k\in\mathbf{Z})$.

18、解：（1）由题意知$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},b=1,$综合$a^2=b^2+c^2$，解得，$a=\sqrt{2}$，

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$………5 分

(2)由题义知，当直线PQ垂直x轴时，即PQ斜率不存在时，PQ方程为$x=1$

与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$联立可求P,Q坐标为$(1,\frac{\sqrt{2}}{2}),(1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$，所以有$k_{AP}+k_{AQ}=2$………7 分

当直线PQ不垂直x轴时，设PQ的斜率为k，则直线PQ的方程为$y=k(x-1)+1(k\neq 2)$，代入

$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，得 $(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2k(k-2)=0$，（1）

由已知$\Delta>0$，设$P\left(x_1y_1\right),Q\left(x_2y_2\right)$，$x_1x_2\neq 0$，则$x_1,x_2$是（1）的两个根，由韦达定理得

$x_1+x_2=\dfrac{4k(k-1)}{1+2k^2}, x_1x_2=\dfrac{2k(k-2)}{1+2k^2}$，（2）………9 分

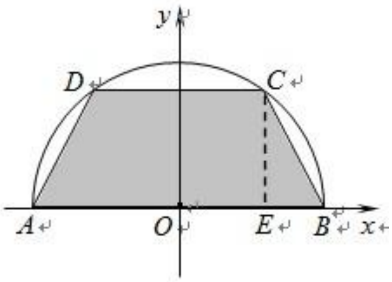
从而直线 AP 与 AQ 的斜率之和 $k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{y_1+1}{x_1}+\dfrac{y_2+1}{x_2}=\dfrac{kx_1+2-k}{x_1}+\dfrac{kx_2+2-k}{x_2}$ ………12 分

$=2k+(2-k)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)=2k+(2-k)\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$ 把（2）代人得………14 分

$k_{AP}+k_{AQ}\ =2k+(2-k)\dfrac{4k(k-1)}{2k(k-2)}=2k-(2k-1)=2$. 为定值，

综上，结论成立………………16 分

19、解：如图所示，以直径 AB 所在的直线为 x 轴，线段 AB 中垂线为 y 轴，建立平面直角坐标系，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于 E，



(I)①$\because CD=2x$，$\therefore OE=x(0<x<1)$，$CE=\sqrt{1-x^2}$

$\therefore y=\dfrac{1}{2}(|AB|+|CD|)\cdot CE=\dfrac{1}{2}(2+2x)\sqrt{1-x^2}$

$=(x+1)\sqrt{1-x^2}\,(0<x<1)$ …………………4 分

②$\because \angle BOC=\theta(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$，$\therefore OE=\cos\theta, CE=\sin\theta$，

$\therefore y=\dfrac{1}{2}(|AB|+|CD|)\cdot CE=\dfrac{1}{2}(2+2\cos\theta)\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta\ (0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$， ……8 分

(说明：若函数的定义域漏写或错误，则一个扣 1 分)

(2)(方法 1)$\therefore y=\sqrt{(x+1)^2(1-x^2)}=\sqrt{-x^4-2x^3+2x+1}$，

令 $t=-x^4-2x^3+2x+1$，

则 $t'=-4x^3-6x^2+2=-2(2x^3+3x^2-1)=-2(x+1)^2(2x-1)$，……………………10 分

令 $t'=0$，$x=\dfrac{1}{2}$，$x=-1$(舍). ……………………………………………………………12 分

$\therefore$当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$t'>0$，$\therefore$函数在$(0，\dfrac{1}{2})$上单调递增，

当 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 时，$t'<0$，$\therefore$函数在$(\dfrac{1}{2}，1)$上单调递减，…………………………14 分

所以当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，t 有最大值 $\dfrac{27}{16}$，$y_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ ……………………………………16 分

答：梯形部件 $ABCD$ 面积的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 平方米.

(方法 2)$\therefore y'=[(\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)]'=(\sin\theta)'+(\sin\theta\cdot\cos\theta)'$

$=\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta+\cos\theta-1$，…………………………10 分

令 $y'=0$，得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\cos\theta=-1$(舍)， ……………………………12 分

$\therefore$当 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ 时， $y'>0$，$\therefore$函数在 $(0,\dfrac{\pi}{3})$ 上单调递增，

当 $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$y'<0$，$\therefore$函数在 $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减 ，………………………14 分

所以当$\theta=\frac{\pi}{3}$时，$y_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

答：梯形部件$ABCD$面积的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$平方米．……………………………16 分

20、解:（1） $f'(x)=ax^2-(a+1)x+1=a(x-1)(x-\frac{1}{a})$，$\because a<0$，$\therefore \frac{1}{a}<1$，

x	$(-\infty,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	—
$f(x)$	递减	极小值	递增	极大值	递减

所以$f(x)$的极小值为$f(\frac{1}{a})=\frac{-2a^2+3a-1}{6a^2}$，极大值为$f(1)=-\frac{1}{6}(a-1)$．

（2）由（1）得$f'(x)=a(x-1)(x-\frac{1}{a})$，

①当$a<0$时，$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，在$[1,2]$上递减．

又因为$f(1)=-\frac{1}{6}(a-1)>0$，$f(0)=-\frac{1}{3}<0$，$f(2)=\frac{1}{3}(2a-1)<0$，

所以$f(x)$在$[0,2]$上有两个零点；

②当$a=0$时，$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{3}$，在$[0,2]$上有两个零点；

③当$0<a\le\frac{1}{2}$时，$\frac{1}{a}\ge2$，$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，在$[1,2]$上递减，

又因为$f(1)=-\frac{1}{6}(a-1)>0$，$f(0)=-\frac{1}{3}<0$，$f(2)=\frac{1}{3}(2a-1)\le0$，

所以$f(x)$在$[0,2]$上有两个零点；

④当$\frac{1}{2}<a<1$时，$1<\frac{1}{a}<2$，所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,\frac{1}{a})$上递减，在$(\frac{1}{a},2)$上递增．又因为

$f(1)=-\frac{1}{6}(a-1)>0$，$f(0)=-\frac{1}{3}<0$，$f(\frac{1}{a})=\frac{-2a^2+3a-1}{6a^2}=\frac{-(2a-1)(a-1)}{6a^2}>0$，所以$f(x)$在$[0,1]$

上有且仅有一个零点，在$[1,2]$上没有零点，所以$f(x)$在$[0,2]$上有且仅有一个零点；

⑤当$a=1$时，$f'(x)\ge0$恒成立，$f(x)$在$[0,2]$单调递增，

$\because f(0)=-\frac{1}{3}<0$，$f(2)>0$，所以$f(x)$在$[0,2]$上有且仅有一个零点.

综上可知，当$\frac{1}{2}<a\le1$时，$f(x)$在$[0,2]$上有且仅有一个零点；

当$a\le\frac{1}{2}$时，$f(x)$在$[0,2]$上有两个零点．