专题突破二　离心率的求法

一、以渐近线为指向求离心率

例1　过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的一个焦点$F$引它的一条渐近线的垂线$FM$，垂足为$M$，并且交$y$轴于点$E$，若$M$为$EF$的中点，则该双曲线的离心率为(　　)

A.2　B.$\sqrt{3}$　C.3　D.$\sqrt{2}$

思维切入　通过直线FM与渐近线垂直写出直线FM的直线方程，从而得到线段FE的中点M的坐标，将其代入渐近线方程，利用$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$可求得.

考点　双曲线的几何性质

题点　求双曲线的离心率

答案　D

解析　取右焦点$F(c,0)$，渐近线方程为$y=\frac{b}{a}x$，

$\because FM\perp OM$，$\therefore$可得直线FM的方程为$y=-\frac{a}{b}(x-c)$，

令$x=0$，解得$y=\frac{ac}{b}$，

$\therefore E\left(0，\frac{ac}{b}\right)$，

$\therefore$线段FE的中点$M\left(\frac{c}{2}，\frac{ac}{2b}\right)$，

又中点M在渐近线$y=\frac{b}{a}x$上，

$\therefore \frac{ac}{2b}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{2}$，

解得$a=b$，

$\therefore$双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{2}$.

点评　双曲线的离心率与渐近线方程之间有着密切的联系，可以借助$\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$进行互求.一般地，如果已知双曲线离心率的值求渐近线方程，或者已知渐近线方程，求离心率的值，都会有两解(焦点在x轴上和焦点在y轴上两种情况)，不能忘记分类讨论.

跟踪训练1　中心在原点，焦点在x轴上的双曲线的一条渐近线经过点$(4，-2)$，则它的离心率为(　　)

A.$\sqrt{6}$　B.$\sqrt{5}$　C.$\frac{\sqrt{6}}{2}$　D.$\frac{\sqrt{5}}{2}$

考点　双曲线的几何性质

题点　求双曲线的离心率

答案　D

解析　由题意知，过点(4，－2)的渐近线的方程为

$y=-\frac{b}{a}x$，$\therefore -2=-\frac{b}{a}\cdot 4$，$\therefore a=2b$.

方法一　设 $b=k(k>0)$，则 $a=2k$，$c=\sqrt{5}k$，$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}k}{2k}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

方法二　$e^2=\frac{b^2}{a^2}+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$，故 $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

二、寻求齐次方程求离心率

例 2　已知双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，若矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 E 上，AB，CD 的中点为 E 的两个焦点，且 $2AB=3BC$，则 E 的离心率是________.

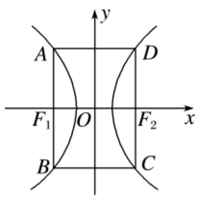
思维切入　通过 $2AB=3BC$，得到 a，b，c 的关系式，再由 $b^2=c^2-a^2$，得到 a 和 c 的关系式，同时除以 a^2，即可得到关于 e 的一元二次方程，求得 e.

考点　双曲线的几何性质

题点　求双曲线的离心率

答案　2

解析　如图，由题意知 $AB=\frac{2b^2}{a}$，



$BC=2c$.

又 $2AB=3BC$，$\therefore 2\times\frac{2b^2}{a}=3\times 2c$，

即 $2b^2=3ac$，$\therefore 2(c^2-a^2)=3ac$，

两边同除以 a^2 并整理得 $2e^2-3e-2=0$，

解得 $e=2$(负值舍去).

点评　求圆锥曲线的离心率，就是求 a 和 c 的值或 a 和 c 的关系，然后根据离心率的定义求得.但在多数情况下，由于受到题目已知条件的限制，很难或不可能求出 a 和 c 的值，只能将条件整理成关于 a 和 c 的关系式，进而求得$\frac{c}{a}$的值，其关键是善于利用定义以及图形中的几何关系来建立关于参数 a，b，c 的关系式，结合 $c^2=a^2+b^2$，化简为参数 a，c 的关系式进行求解.

跟踪训练 2 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A$，$B$ 分别为椭圆的左顶点和上顶点，F 为右焦点，且 $AB\perp BF$，则椭圆的离心率为________.

考点 椭圆的离心率问题

题点 求 a，b，c 的齐次关系式得离心率

答案 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

解析 在$\triangle ABF$ 中，$AB=\sqrt{a^2+b^2}$，$BF=a$，$AF=a+c$.

由 $AB\perp BF$ 得 $AB^2+BF^2=AF^2$，

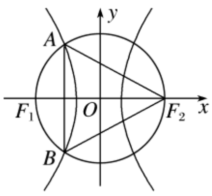
将 $b^2=a^2-c^2$ 代入，得 $a^2-ac-c^2=0$，

即 $e^2+e-1=0$，解得 $e=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

因为 $0<e<1$，所以 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

三、以焦点三角形为指向求离心率

例 3 如图，F_1 和 F_2 分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的两个焦点，$A$ 和 B 是以 O 为圆心，OF_1 为半径的圆与该双曲线左支的两个交点，且$\triangle F_2AB$ 是等边三角形，则双曲线的离心率为________.



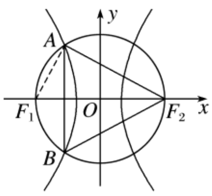
思维切入 连结 AF_1，在$\triangle F_1AF_2$ 中利用双曲线的定义可求解.

考点 双曲线的几何性质

题点 求双曲线的离心率

答案 $\sqrt{3}+1$

解析 **方法一** 如图，连结 AF_1，由$\triangle F_2AB$ 是等边三角形，知$\angle AF_2F_1=30°$.



易知$\triangle AF_1F_2$ 为直角三角形，

则 $AF_1=\frac{1}{2}F_1F_2=c$，

$AF_2=\sqrt{3}c$，所以 $2a=(\sqrt{3}-1)c$，

从而双曲线的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=1+\sqrt{3}$.

方法二　如图，连结 AF_1，易得 $\angle F_1AF_2=90°$，

$\beta=\angle F_1F_2A=30°$，$\alpha=\angle F_2F_1A=60°$，

于是离心率

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{F_1F_2}{AF_2-AF_1}=\frac{\sin\angle F_1AF_2}{\sin\alpha-\sin\beta}$$

$$=\frac{\sin 90°}{\sin 60°-\sin 30°}=\sqrt{3}+1.$$

点评　涉及到焦点三角形的题目往往利用圆锥曲线的定义求得$\dfrac{c}{a}$的值.

跟踪训练 3　设 F_1，F_2 分别是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，点 P 在椭圆 C 上，若线段 PF_1 的中点在 y 轴上，$\angle PF_1F_2=30°$，则椭圆的离心率为(　　)

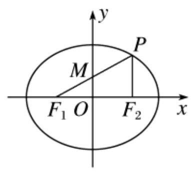
A.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　B.$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　C.$\dfrac{1}{3}$　D.$\dfrac{1}{6}$

考点　椭圆的离心率问题

题点　求 a，b，c 得离心率

答案　A

解析　如图，设 PF_1 的中点为 M，连结 PF_2.



因为 O 为 F_1F_2 的中点，

所以 OM 为$\triangle PF_1F_2$ 的中位线.

所以 $OM/\!/PF_2$，所以$\angle PF_2F_1=\angle MOF_1=90°$.

因为$\angle PF_1F_2=30°$，

所以 $PF_1=2PF_2$，$F_1F_2=\sqrt{3}PF_2$.

由椭圆定义得 $2a=PF_1+PF_2=3PF_2$，

即 $a=\dfrac{3PF_2}{2}$，

$2c=F_1F_2=\sqrt{3}PF_2$，即 $c=\dfrac{\sqrt{3}PF_2}{2}$，

则 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}PF_2}{2}\cdot\dfrac{2}{3PF_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

四、利用圆锥曲线的范围求离心率的取值范围

例 4　已知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，$P$ 为椭圆上一点，且$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=c^2$，则此椭圆离心率的取值范围是________.

思维切入　设 P 点坐标，通过$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=c^2$及椭圆方程得到 x^2 的值，由 $x^2\in[0，a^2]$，求得 a^2 的取值范围进而求得 e 的取值范围.

考点　椭圆的离心率问题

题点　由 a 与 c 的关系式得离心率

答案　$\left[\frac{\sqrt{3}}{3}，\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

解析　设 $P(x，y)$，则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-c-x，-y)\cdot(c-x，-y)=x^2-c^2+y^2=c^2$，

将 $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$ 代入上式，

解得 $x^2=\frac{(2c^2-b^2)a^2}{c^2}=\frac{(3c^2-a^2)a^2}{c^2}$.

又 $x^2\in[0，a^2]$，$\therefore 2c^2\leqslant a^2\leqslant 3c^2$，

$\therefore e=\frac{c}{a}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3}，\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

点评　(1)通过设点的坐标，利用圆锥曲线上点的坐标的范围，转化为离心率的取值范围.

(2)利用圆锥曲线的焦半径(圆锥曲线上一点到焦点的距离叫做该点的焦半径)的范围确定离心率的范围.

①椭圆焦半径的取值范围为$[a-c，a+c]$;

②双曲线的焦半径:

(ⅰ)点 P 与焦点 F 同侧时，其取值范围为$[c-a，+\infty)$;

(ⅱ)点 P 与焦点 F 位于异侧时，其取值范围为$[c+a，+\infty)$.

跟踪训练 4　已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 M 在双曲线的左支上，且 $MF_2=7MF_1$，则此双曲线的离心率的最大值为__________.

答案　$\frac{4}{3}$

解析　因为 $MF_2=7MF_1$，所以 $MF_2-MF_1=6MF_1$，

即 $2a=6MF_1\geqslant 6(c-a)$，故 $8a\geqslant 6c$，即 $e=\frac{c}{a}\leqslant\frac{4}{3}$，当且仅当 M 为双曲线的左顶点时，等号成立.

故此双曲线离心率的最大值为$\frac{4}{3}$.

达标检测

1.已知点(2,3)在双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$上，$C$ 的焦距为 4，则它的离心率为(　　)

A.2　B.$\frac{5}{2}$　C.3　D.4

考点　双曲线的几何性质

题点　求双曲线的离心率

答案　A

解析　根据点(2,3)在双曲线上，得$\frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$，①

考虑到焦距为 4，则 $2c=4$，即 $c=2$.②

联立①②及 $a^2+b^2=c^2$，

解得 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，所以离心率 $e=2$.

2.若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的两条渐近线互相垂直，则该双曲线的离心率是________.

答案　$\sqrt{2}$

解析　双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

由题意得$-\frac{b}{a}\times\frac{b}{a}=-1$，即$\frac{b^2}{a^2}=1$，故 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{2}$.

3.若一个椭圆长轴的长度、短轴的长度和焦距成等差数列，则该椭圆的离心率是________.

答案　$\frac{3}{5}$

解析　由题意有，$2a+2c=2(2b)$，即 $a+c=2b$，

又 $c^2=a^2-b^2$，消去 b 整理得 $5c^2=3a^2-2ac$，

即 $5e^2+2e-3=0$，

又∵$0<e<1$，∴$e=\frac{3}{5}$或 $e=-1$(舍去).

4.已知 F_1，F_2 分别是双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点，点 M 在 E 上，MF_1 与 x 轴垂直，$\sin\angle MF_2F_1=\frac{1}{3}$，则 E 的离心率为________.

考点　双曲线的几何性质

题点　求双曲线的离心率

答案　$\sqrt{2}$

解析　设 $MF_1=m$，$MF_2=3m$，

由双曲线定义 $3m-m=2a$，即 $2m=2a$，得 $m=a$，

在 Rt△MF_2F_1 中，$9m^2-m^2=4c^2$，即 $8m^2=4c^2$，

即$\sqrt{2}a=c$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$.

5.已知 F_1，F_2 是椭圆的两个焦点，满足$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 的点 M 总在椭圆内部，则椭圆离心率的取值范围是________________.

答案 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

解析 由题意知，$b>c$，即$\sqrt{a^2-c^2}>c$，得 $a>\sqrt{2}c$，

$\therefore e=\dfrac{c}{a}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

则椭圆离心率的取值范围为$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

针对训练

一、选择题

1.已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率是$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率是(　　)

A.$\dfrac{5}{4}$　B.$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　C.$\dfrac{3}{2}$　D.$\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

答案 B

解析 由椭圆的离心率 $e_1=\sqrt{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，可知$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$，所以双曲线的离心率 $e_2=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

2.设双曲线的一个焦点为 F，虚轴的一个端点为 B，如果直线 FB 与该双曲线的一条渐近线垂直，那么此双曲线的离心率为(　　)

A.$\sqrt{2}$　B.$\sqrt{3}$　C.$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　D.$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

答案 D

解析 不妨设焦点 $F(c，0)$，虚轴的端点 $B(0，b)$，则 $k_{FB}=-\dfrac{b}{c}$.

又渐近线的斜率为$\pm\dfrac{b}{a}$，所以由直线垂直得$-\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{b}{a}=-1$(斜率为$-\dfrac{b}{a}$的直线显然不符合)，即 $b^2=ac$.

又 $c^2-a^2=b^2$，故 $c^2-a^2=ac$，两边同除以 a^2，得方程 $e^2-e-1=0$，解得 $e=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$(负值舍去).

3.已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，右焦点 F 到渐近线的距离为 2，点 F 到原点的距离为 3，则双曲线 C 的离心率为(　　)

A.$\frac{\sqrt{5}}{3}$　B.$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　C.$\frac{\sqrt{6}}{3}$　D.$\frac{\sqrt{6}}{2}$

答案　B

解析　∵右焦点 F 到渐近线的距离为 2，∴$F(c,0)$到渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离为 2，即$\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$，

又 $b>0$，$c>0$，$a^2+b^2=c^2$，∴$\frac{bc}{c}=b=2$.又∵点 F 到原点的距离为 3，

∴$c=3$，∴$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{5}$，

∴离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

4.已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为 F，右顶点为 A，点 B 在椭圆上，且 $BF\perp x$ 轴，直线 AB 交 y 轴于点 P，若$\overrightarrow{AP}=\sqrt{2}\overrightarrow{PB}$，则椭圆的离心率是(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　C.$\frac{1}{3}$　D.$\frac{1}{2}$

答案　B

解析　由题意知 $B\left(-c，\frac{b^2}{a}\right)$，设 $P(0，t)$，又 $A(a,0)$，

∵$\overrightarrow{AP}=\sqrt{2}\overrightarrow{PB}$，∴$(-a，t)=\sqrt{2}\left(-c，\frac{b^2}{a}-t\right)$，

∴$a=\sqrt{2}c$，∴$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.椭圆 Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，焦距为 $2c$.若直线 $y=\sqrt{3}(x+c)$与椭圆 Γ 的一个交点 M 满足$\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$，则该椭圆的离心率等于(　　)

A.$\sqrt{2}-1$　　　　B.$\sqrt{5}-2$

C.$\sqrt{3}-1$　　　　D.$\sqrt{3}-\sqrt{2}$

答案　C

解析　由题意可知，直线 $y=\sqrt{3}(x+c)$过点 $F_1(-c，0)$，且倾斜角为 60°，所以$\angle MF_1F_2=60°$，从而$\angle MF_2F_1=30°$，所以 $MF_1\perp MF_2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle MF_1F_2$ 中，$MF_1=c$，$MF_2=\sqrt{3}c$，所以 $2a=MF_1+MF_2=c+\sqrt{3}c$，

所以该椭圆的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

6.设 F_1，F_2 分别为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点，双曲线上存在一点 P 使得 $PF_1+PF_2=3b$，$PF_1\cdot PF_2=\frac{9}{4}ab$，则该双曲线的离心率为(　　)

A.3　B.$\frac{9}{4}$　C.$\frac{5}{3}$　D.$\frac{4}{3}$

考点　双曲线的几何性质

题点　求双曲线的离心率

答案　C

解析　不妨设 P 为双曲线右支上一点，

$PF_1=r_1$，$PF_2=r_2$.

根据双曲线的定义，得 $r_1-r_2=2a$，

又 $r_1+r_2=3b$，

故 $r_1=\dfrac{3b+2a}{2}$，$r_2=\dfrac{3b-2a}{2}$.

又 $r_1\cdot r_2=\dfrac{9}{4}ab$，

所以$\dfrac{3b+2a}{2}\cdot\dfrac{3b-2a}{2}=\dfrac{9}{4}ab$，

解得$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$(负值舍去)，

故 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+1}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+1}=\dfrac{5}{3}$.

二、填空题

7.设 F_1，F_2 为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点，过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线与椭圆交于 A，B 两点，若$\triangle ABF_2$为锐角三角形，则该椭圆离心率 e 的取值范围是________.

答案　$(\sqrt{2}-1,1)$

解析　由题意可知$\angle AF_2F_1<\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\tan\angle AF_2F_1=\dfrac{AF_1}{F_1F_2}=\dfrac{\frac{b^2}{a}}{2c}<1$，解得 $e>\sqrt{2}-1$ 或 $e<-1-\sqrt{2}$.

又 $0<e<1$，故$\sqrt{2}-1<e<1$.

8.已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的右焦点为 F，若过点 F 且倾斜角为 $60°$的直线 l 与双曲线的右支有且只有一个交点，则双曲线的离心率 e 的取值范围是________.

答案　$[2，+\infty)$

解析　由题意，知$\dfrac{b}{a}\geqslant\sqrt{3}$，则$\dfrac{b^2}{a^2}\geqslant3$，所以 $e=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}\geqslant2$.

9.已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的渐近线与圆 $x^2+y^2-6x+5=0$ 有公共点，则双曲线的离心率的取值范围是________.

答案　$\left(1，\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right]$

解析　双曲线的渐近线的方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，圆的方程可化为$(x-3)^2+y^2=4$.若渐近线与圆有公共点，则$\frac{3b}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant 2$，即 $3b\leqslant 2c$，$\therefore b^2\leqslant\frac{4}{9}c^2$，$\therefore c^2-a^2\leqslant\frac{4}{9}c^2$，

$\therefore\frac{5}{9}c^2\leqslant a^2$，$\therefore e^2=\frac{c^2}{a^2}\leqslant\frac{9}{5}$，$\therefore e\leqslant\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

又$\because e>1$，$\therefore 1<e\leqslant\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

10.已知 F_1，F_2 分别是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，过 F_2 的直线交椭圆于 P，Q 两点，若$\angle F_1PQ=45°$，$PQ=\sqrt{2}PF_1$，则椭圆的离心率为________.

答案　$\sqrt{2}-1$

解析　在$\triangle F_1PQ$ 中，$\angle F_1PQ=45°$，

$PQ=\sqrt{2}PF_1$，

由余弦定理可得 $F_1Q^2=PF_1^2+2PF_1^2-2\sqrt{2}PF_1^2\frac{\sqrt{2}}{2}=PF_1^2$，$\therefore F_1Q=PF_1$，

$\therefore\triangle F_1PQ$ 为等腰直角三角形，斜边 $PQ\perp x$ 轴，

$\therefore\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形，

$\therefore PF_1=\sqrt{2}F_1F_2=2\sqrt{2}c$，$PF_2=F_1F_2=2c$.

由椭圆的定义知 $2a=PF_1+PF_2=2\sqrt{2}c+2c=2(\sqrt{2}+1)c$，

$\therefore$椭圆的离心率 $e=\frac{2c}{2(\sqrt{2}+1)c}=\sqrt{2}-1$.

11.已知点 F_1，F_2 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的左、右焦点，若双曲线左支上存在点 P 与点 F_2 关于直线 $y=\frac{b}{a}x$ 对称，则双曲线的离心率为________.

答案　$\sqrt{5}$

解析　过焦点 F_2 且垂直于直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的直线方程为 $y=-\frac{a}{b}(x-c)$.联立$\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\ y=-\frac{a}{b}(x-c),\end{cases}$

解得 $x=\frac{a^2}{c}$，$y=\frac{ab}{c}$，故对称中心的坐标为$\left(\frac{a^2}{c},\ \frac{ab}{c}\right)$.

由中点坐标公式可得对称点的坐标为$\left(\frac{2a^2}{c}-c,\ \frac{2ab}{c}\right)$，

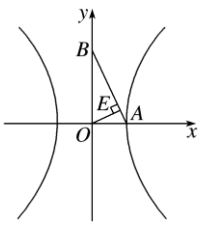
将其代入双曲线的方程可得$\frac{(2a^2-c^2)^2}{a^2c^2}-\frac{4a^2b^2}{b^2c^2}=1$，

化简可得 $c^2=5a^2$，故可得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.

三、解答题

12.设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}(0<a<b)$的半焦距为 c，直线 l 过$(a,0)$，$(0，b)$两点，已知原点到直线 l 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}c$，求双曲线的离心率.

解　如图所示，在$\triangle AOB$ 中，$OA=a$，$OB=b$，$OE=\frac{\sqrt{3}}{4}c$，$AB=\sqrt{a^2+b^2}=c$.



因为 $AB\ OE=OA\ OB$，

所以 $c\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}c=ab$，

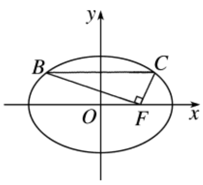
即$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)=ab$，

两边同除以 a^2，得$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b}{a}+\frac{\sqrt{3}}{4}=0$，

解得$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$或$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$(舍去).

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$.

13.如图，在平面直角坐标系 xOy 中，F 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点，直线 $y=\frac{b}{2}$与椭圆交于 B，C 两点，且$\angle BFC=90°$，求该椭圆的离心率.



解　由已知条件易得 $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a，\frac{b}{2}\right)$，

$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a，\frac{b}{2}\right)$，$F(c，0)$.

$\therefore\overrightarrow{BF}=\left(c+\frac{\sqrt{3}}{2}a，-\frac{b}{2}\right)$，

$\overrightarrow{CF}=\left(c-\frac{\sqrt{3}}{2}a，-\frac{b}{2}\right)$.

由$\angle BFC=90°$，可得$\overrightarrow{BF}\ \overrightarrow{CF}=0$，

所以$\left(c-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(c+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)+\left(-\frac{b}{2}\right)^2=0$，

$c^2-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2=0$，

即 $4c^2-3a^2+(a^2-c^2)=0$，亦即 $3c^2=2a^2$，

所以$\frac{c^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，则 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

探究与拓展

14.已知椭圆和双曲线有公共焦点 F_1，F_2，P 是它们的一个交点，$\angle F_1PF_2=60°$，记椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1 和 e_2.且 e_1 与 e_2 互为倒数，则 $e_1=$________.

答案 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析 不妨设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$，双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0$，$b_2>0)$，$F_1F_2=2c$，不妨设 $PF_1>PF_2$，

$PF_1+PF_2=2a_1$，①

$PF_1-PF_2=2a_2$，②

由①与②可得，$PF_1=a_1+a_2$，

$PF_2=a_1-a_2$，

由余弦定理得，$F_1F_2^2=PF_1^2+PF_2^2-2PF_1\cdot PF_2\cos 60°$.

即 $4c^2=(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2-(a_1+a_2)(a_1-a_2)$，

$4c^2=a_1^2+3a_2^2$，$\therefore\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4$，又 $e_2=\frac{1}{e_1}$，

则$\frac{1}{e_1^2}+3e_1^2=4$，即 $3e_1^4-4e_1^2+1=0$，

得 $e_1^2=\frac{1}{3}$或 1(舍去)，$e_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15.在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为 2.

(1)若椭圆 C 经过$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}，1\right)$，求椭圆 C 的标准方程；

(2)设 $A(-2,0)$，F 为椭圆 C 的左焦点，若椭圆 C 上存在点 P 满足$\frac{PA}{PF}=\sqrt{2}$，求椭圆 C 的离心率的取值范围.

解 (1)椭圆 C 的焦距 $2c=2$，所以 $c=1$，

所以 $a^2=b^2+1$.

因为椭圆 C 经过点$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}，1\right)$，

所以$\frac{3}{2a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，

即$\frac{3}{2(b^2+1)}+\frac{1}{b^2}=1$.

解得 $b^2=2$(舍去负值).故 $a^2=3$.

故椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)易知 $F(-1,0)$，$a^2-b^2=1$，①

设点 P 的坐标为$(x_0，y_0)$，

于是$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，②

因为$\frac{PA}{PF}=\sqrt{2}$，所以 $PA^2=2PF^2$，

所以$(x_0+2)^2+y_0^2=2(x_0+1)^2+2y_0^2$，

整理得 $x_0^2+y_0^2=2$，③

由①②③，得 $x_0^2=2a^2-a^2b^2=a^2(3-a^2)$.

因为$-a\leqslant x_0\leqslant a$，所以 $0\leqslant x_0^2\leqslant a^2$.

于是 $0\leqslant a^2(3-a^2)\leqslant a^2$，所以 $2\leqslant a^2\leqslant 3$，

所以$\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$，

所以$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\frac{1}{a}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $c=1$，所以$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\frac{c}{a}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故椭圆 C 的离心率的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{3}}{3}，\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.