关于高中数学探究教学的理解与实践的思考

◉江苏省无锡市玉祁高级中学　郑　重

著名数学教育家弗赖登塔尔极力推崇将落实数学探究能力和数学发现能力的培养任务作为课堂教学的重心，并认为数学教育应该以一种“有思想的再创造”的模式存在，让学生根据个人的发挥去探索和发现数学问题，形成自身独特的认识和体验.新课程理念下，探究教学模式广受关注，其必要性已然形成共识，不少教师在教学中积极尝试设计各种探究活动，以此来开展探究性教学.回味这样的实践过程，大家发出同一种声音，即在探究教学模式下如何让数学探究真正发生？如何才能真正让学生自主探究和主动学习呢？笔者以为，可以从以下方面展开，叙述如下，供大家参考.

一、知识形成过程的探究：实现感性到理性的升华

从数学探究来看，学生是探究的“执行者”，而非通过被动接受而实现探究和建构的，而是有赖于主动感知去建构其数学独特的意义的过程.因此，学生需要从数学家关于数学的观点中去领悟，通过探究知识的形成过程去体验，让学习过程变得更加多姿多彩，以实现感性到理性的升华，最终达到提升探究能力的目的.

案例1　“圆锥曲线”的探究课

师：请大家先阅读教材第39页中“椭圆标准方程的推导过程”，并以小组为单位探究其推导过程中表现出来的几何特征.

学生开始针对以下推导过程进行剖析：

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,\quad ①$$

移项后，可得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

等式两边平方并整理后，可得

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad ②$$

再次两边平方并整理后，可得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),$$

再次两边除以$a^2(a^2-c^2)$，可得$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$.

……

师：谁能阐述①式的几何意义？（学生七嘴八舌地复述椭圆定义：椭圆是……）

师：不错.还有需要补充的吗？

生1：$2a>2c$.

师：非常好！再加上生1的条件就是椭圆定义了.大家再一起来看②式，再来探究一下该式有何几何意义？（学生又一次展开探讨）

师（点拨）：必要时，变形关系式或许可以达到意想不到的效果.

生2：等式两边同时除以c，可得$\frac{a^2}{c}-x=\frac{a}{c}\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.该式表示椭圆上的点到直线$x=\frac{a^2}{c}$的距离为到定点距离的$\frac{a}{c}$倍.

师：太厉害了！生2所述就是椭圆的另一几何意义，我们将其稍作变形，则有$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\frac{a^2}{c}-x}=\frac{c}{a}=e$，从而生成椭圆的另一定义……

师：看来，你们的创造力是无穷的！那我们再来探究最后一个问题：双曲线是否具有这样的几何意义？

……

设计说明：数学探究是以新课改理论为指导，以教师的引导为主搭建起抽象知识与形象思维的桥梁，以达到深入探究的目的.在此基础上，教师需给予学生充足的时间和空间，以探究为主线，驱动学生主动探究，进而形成深刻的认识.以上案例中，采用了“问题——探究——提炼”的模式探究“圆锥曲线”的形成过程，通过浓烈的数学探究氛围，使得学生的思路进一步开放，思维进一步优化，在全班交流中实现思维的碰撞，并领悟到统一定义的运用价值所在.

二、围绕数学问题探究:实现学习效率的提升

问题是学习动机生成的本源,失去问题则无法产生学习驱动,学习也仅仅是表层的.由此可见,有效的探究性学习都是建立在问题之上的,问题指引着探究活动的方向,直接关系到学生的探究取向,架构了探究活动的内容,以此为指引的探究是有序高效的,直接影响到学生的学习效度.因此,教师需牢牢把握时机,精选易激起探究兴趣的问题来组织探究活动,为学生的探究铺路引航,驱动学生积极主动地进行探究,并逐渐将数学探究引向深入,使得乐于进取的积极态度也逐步稳固形成,最终实现学习效率的提升.

案例2 已知曲线 $y^2=-4-2x$,试求出该曲线上与原点距离最近的点的坐标.

学生经过思考后,很快给出以下解析过程:设所求点的坐标为 $P(x,y)$,则 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2-2x-4}=\sqrt{(x-1)^2-5}(x\leqslant-2)$.于是,当 $x=-2$ 时,$|OP|_{\min}=2$,$y=0$,故点$(-2,0)$即为所求的点的坐标.

更进一步地,教师逐一进行以下变式:

变式1:已知曲线 $y^2=4-2x$,试求出该曲线上与原点距离最近的点 P 的坐标.(变化条件)

变式2:已知曲线 $y^2=4-2x$,试求出该曲线上一点 M,使得点 M 到点 $A(a,0)$的距离最小,并求出最小距离.(深化条件)

变式3:已知抛物线 $C_1:y^2=-4-2x$ 与动圆 $C_2:(x-a)^2+y^2=1$ 无公共点,试求出 a 的取值范围.(增加背景)

变式4:某种酒杯的轴截面近似一条抛物线,杯口的宽度是4cm,杯子的深度是8cm,我们将该种酒杯称为抛物线形酒杯.现将两只大小各不相同的玻璃球置于杯中,其中一只小球可触及杯底,另一只则不可.试根据数学知识探究:若想要玻璃球可以触及杯底,则该球半径需是多少?(关联实际)

变式5:若变式4中的酒杯为轴截面为近似椭圆的酒杯,经测量该杯的杯口宽度是4cm,杯子的深度是9cm,且中间最宽处距离杯子底部距离是5cm,则情况又会如何呢?(更换背景)

变式6:已知线段 AB 定长为2,且其两个端点在抛物线 $y^2=x$ 上移动,若线段 AB 的中点为 M,试求出该点 M 到 y 轴的最短距离,并求出此时点 M 的坐标.(变换结论)

设计说明:变式训练的开展可以避免教师的机械灌输和学生的机械学习,促进了有意义的探究性学习.中学数学中蕴含着各种可推广的问题.以上案例中,适当地变化典型例题,给数学课堂注入了新的活力,从数学问题的多变性出发设计,使得学生的探究充满激情,启发了学生的数学发现,使学生对数学规律产生了更好的感悟,对数学本质有了一种新的领悟.

三、围绕数学作文探究:促进实践能力和创新能力的发展

数学教材中存在着各种各样值得探究的课题,在当前课程改革逐步深化的今天,数学作文已然成为一种新颖的数学探究模式出现在学生的课堂中,它不仅改变了传统数学探究的单一模式,还有效整合了数学文化,同时孕育了学生的数学情感,更深层次地促进了学生的实践能力和创新能力的发展.

案例3 以"圆锥曲线"的课题研究

在课堂上,教师安排学生针对自身对圆锥曲线的独特认识进行交流.课后,又继续引导学生围绕对圆锥曲线的感悟去撰写作文,学生个个兴趣盎然,有了多种多样的生成.

有学生生成这样的感悟:圆好似人的一生,从某一点开始孕育人生旅途,匆匆忙忙、毫无停歇地走完一生后依然回到原点.当人生的半径越大,就能越发充满激情和希望,当人生的半径越小,他的人生就会越发灰暗和短暂……

还有学生有了这样的认识:椭圆的两个焦点正如昨天与今天,椭圆上的点就是明天,明天的精彩是由昨天与今天决定的……

设计说明:好的探究性作业不仅利于知识的深化,而且可以升华自身的情感和态度,让学生在展示自身学习成果的同时倾诉心灵感受,为学生的数学表达提供一片崭新天地.教师多引导、多设计出一些拓展学习空间的作业形式,激发学生探究的积极性和主动性,使其在生活中体验和感悟数学,感受数学学习带来的快乐,这不仅仅是数学探究的目的所在,更是教师育人的追求.

总之,数学核心素养的提升必须依靠数学探究,同时数学探究也是培养和孕育创新能力的重要方式.数学探究创设了多元化和动态化的学习氛围,为学生带来了巨大的财富,有助于形成终身发展应具有的综合素养.在课堂改革中,需要我们不断研究和探讨,只有把握教学规律,才能让学生尽快成熟和成长起来,才能真正加快新课程改革的脚步.W