

高一数学小练 (24)

姓名: _____ 班级: _____ 学号: _____

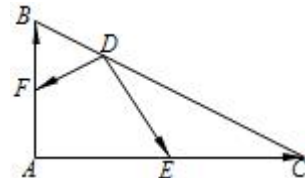
一、选择题 (本大题共 6 小题, 共 30.0 分)

1. 已知角 α 的终边经过点 $P(-5, -12)$, 则 $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ 的值等于 ()
A. $-\frac{5}{13}$ B. $-\frac{12}{13}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{12}{13}$
2. 下列叙述中, 正确的是 ()
A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
B. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$
C. 若 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$
D. 若向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}$ 共线, 则有且只有一个实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$
3. 已知单位向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{13}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$
4. 已知函数 $f(x) = \log_2(x^2 - ax + 3a)$ 在 $[2, +\infty)$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是 ()
A. $(-\infty, 4]$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(-4, 4]$ D. $(-4, 2]$
5. 幂函数 $f(x) = (m^2 - 2m + 1)x^{2m-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 则实数 m 的值为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 1 或 2
6. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值是 ()
A. -2 B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. -1

二、填空题 (本大题共 3 小题, 共 15.0 分)

7. 函数 $y = a^{x-2} + 1$ ($a > 0, a \neq 1$) 不论 a 为何值时, 其图象恒过的定点为 _____.
8. 已知向量 $\vec{a} = (-1, 2)$, $\vec{b} = (m, 1)$, 若向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直, 则 $m =$ _____.

9. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $AB = 2$, $AC = 4$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$ 的值为 _____.



三、解答题（本大题共 3 小题，共 36.0 分）

10. 已知函数 $f(x) = 6x^2 + x - 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的零点;

(2) 若 α 为锐角, 且 $\sin \alpha$ 是 $f(x)$ 的零点. 求 $\frac{\tan(\pi + \alpha) \cdot \cos(-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot \sin(\pi - \alpha)}$ 的值;

11. 平面内给定三个向量 $\vec{a} = (3, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, $\vec{c} = (4, 1)$, 求下列三个问题:

(1) 试写出将 $\vec{a}$ 用 $\vec{b}$, $\vec{c}$ 表示的表达式;

(2) 若 $(\vec{a} + k\vec{c}) \perp (2\vec{b} - \vec{a})$, 求实数 k 的值;

(3) 若向量 $\vec{d}$ 满足 $(\vec{d} + \vec{b}) \parallel (\vec{a} - \vec{c})$, 且 $|\vec{d} - \vec{a}| = \sqrt{26}$, 求 $\vec{d}$.

12. 已知函数 $f(x) = \log_2 \frac{x}{4} \cdot \log_2 2x$.

(1) 求不等式 $f(x) > 0$ 的解集;

(2) 当 $x \in [1, 4]$ 时, 求 $f(x)$ 的值域.

答案和解析

1. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题主要考查任意角的三角函数的定义, 诱导公式, 属于基础题. 利用任意

角的三角函数的定义, 诱导公式, 求得 $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ 的值.

【解答】

解: $\because$ 角 α 的终边经过点 $P(-5, -12)$, 则 $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{-5}{\sqrt{25+144}} = \frac{5}{13}$,

故选 C.

2. 【答案】A

【解析】

解: 对于 A: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$,

对于 B: 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$,

对于 C: 若 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 若 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$, 则不成立,

对于 D: 若 $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, 则任意实数 λ , 都有 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ 不成立,

故选: A

通过向量的加减判断 A, 根据向量共线判断 B, 根据举反例判断 CD

本题考查了向量数乘运算的定义以及平面向量共线定理, 需注意 $\vec{0}$ 是一个特

殊向量, 方向是任意的, 和所有向量都是共线向量.

3. 【答案】C

【分析】

本题考查平面向量的模和夹角, 可知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 这样对 $|\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{13}$ 两边

平方即可求出 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的值, 进而求出 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 的值, 从而得出 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹

角, 属基础题.

【解答】

解: $(\vec{a} + 3\vec{b})^2$

$$= \vec{a}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2$$

$$= 1 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9$$

$$= 13;$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2};$$

$$\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{2};$$

$\therefore \vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

故选 C.

4. 【答案】C

若函数 $f(x) = \log_2(x^2 - ax + 3a)$ 在 $[2, +\infty)$ 上是增函数, 则 $x^2 - ax + 3a > 0$ 且 $f(2) > 0$, 根据二次函数的单调性, 我们可得到关于 a 的不等式, 解不等式即可得到 a 的取值范围. 本题考查的知识点是复合函数的单调性, 二次函数的性质, 对数函数的单调区间, 其中根据复合函数的单调性, 构造关于 a 的不等式, 是解答本题的关键.

【解答】

解: 若函数 $f(x) = \log_2(x^2 - ax + 3a)$ 在 $[2, +\infty)$ 上是增函数,

则当 $x \in [2, +\infty)$ 时,

$x^2 - ax + 3a > 0$ 且函数 $f(x) = x^2 - ax + 3a$ 为增函数.

即 $\frac{a}{2} \leq 2$, $f(2) = 4 + a > 0$.

解得 $-4 < a \leq 4$.

故选 C.

5. 【答案】C

解: $\because$ 幂函数 $f(x) = (m^2 - 2m + 1)x^{2m-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$$\therefore \begin{cases} m^2 - 2m + 1 = 1 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases},$$

解得 $m = 2$.

故选: C.

利用幂函数的定义及性质列出方程组, 由此能求出实数 m 的值.

本题考查实数值的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意幂函数的定义及性质的合理运用.

6. 【答案】B

解:建立如图所示的坐标系,以BC中点

为坐标原点,

则 $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$,

设 $P(x, y)$, 则 $\overrightarrow{PA}=(-x, \sqrt{3}-y)$, $\overrightarrow{PB}=(-1-x, -y)$, $\overrightarrow{PC}=(1-x, -y)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = 2x^2 - 2\sqrt{3}y + 2y^2 = 2\left[x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right]$$

$\therefore$ 当 $x=0$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 取得最小值 $2 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}$,

故选:B.

根据条件建立坐标系, 求出点的坐标, 利用坐标法结合向量数量积的公式进行计算即可.

本题主要考查平面向量数量积的应用, 根据条件建立坐标系, 利用坐标法是解决本题的关键.

7. 【答案】 (2, 2)

【分析】

本题考查指数函数的图象过定点问题, 属基础题, 本题也可利用指数函数的图象变换求出. 令 $x-2=0$, 则 $x=2$, 即为定点横坐标, 代入函数式可得定点纵坐标.

解: 令 $x=2$, 得 $y=a^0+1=2$,

所以函数 $y=1+a^{x-2}$ 的图象恒过定点坐标是 (2, 2).

故答案为: (2, 2).

8. 【答案】 7

解: $\because$ 向量 $\vec{a}=(-1, 2)$, $\vec{b}=(m, 1)$,

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = (-1+m, 3),$$

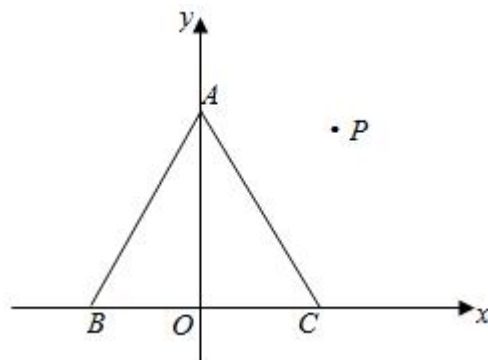
$\because$ 向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直,

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = (-1+m) \times (-1) + 3 \times 2 = 0,$$

解得 $m=7$.

故答案为: 7.

利用平面向量坐标运算法则先求出 $\vec{a} + \vec{b}$, 再由向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直, 利用向量垂直的条件能求出 m 的值.



本题考查实数值的求法,是基础题,解题时要认真审题,注意平面向量坐标运算法则和向量垂直的性质的合理运用.

9.【答案】 $\frac{1}{4}$

解:在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{2}$,

建立直角坐标系, $AB=2$, $AC=4$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$,

根据题意得到:

则: $A(0, 0)$, $F(0, 1)$, $D(1, \frac{3}{2})$, $E(2, 0)$

所以: $\overrightarrow{DE} = (1, -\frac{3}{2})$, $\overrightarrow{DF} = (-1, -\frac{1}{2})$

所以: $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

故答案为: $-\frac{1}{4}$

首先建立平面直角坐标系,根据向量间的关系式,求出向量的坐标,最后求出向量的数量积.

本题考查的知识要点:直角坐标系中向量的坐标运算,向量的数量及运算,属于基础题型.

10.【答案】解: (1) 原式 $= 2^{3 \times \frac{2}{3}} + (\frac{2}{3})^{4 \times (-\frac{3}{4})} - 1 = 4 + \frac{27}{8} - 1 = \frac{51}{8}$,

(2) 原式 $= 2 + \log_6 2 + \log_6 3 = 2 + \log_6 6 = 3$

10 解: (I) 令 $f(x) = 6x^2 + x - 1 = 0$

得零点 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = -\frac{1}{2}$. ----- (4分) (写成点坐标扣1分)

(II) 由 α 为锐角, 所以 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ----- (6分)

(i) $\frac{\tan(\pi + \alpha) \cdot \cos(-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot \sin(\pi - \alpha)} = \frac{\tan \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin \alpha}$ ----- (8分)

$= \frac{1}{\sin \alpha} = 3$ ----- (10分)

11. $\vec{a} = \frac{5}{9}\vec{b} + \frac{8}{9}\vec{c}$ $k = -\frac{11}{18}$ $\vec{d} = (-2, 1)$ 或 $\vec{d} = (2, -3)$

$$(1) f(x) = \log_2 \frac{x}{4} \cdot \log_2 2x$$

$$= (\log_2 x - 2) \cdot (\log_2 x + 1) \dots (2 \text{分})$$

$$\text{令 } \log_2 x = t, \therefore f(x) = g(t) = (t-2) \cdot (t+1),$$

$$\text{由 } f(x) > 0, \text{ 可得 } (t-2)(t+1) > 0, \therefore t > 2 \text{ 或 } t < -1, \dots (4 \text{分})$$

$$\therefore \log_2 x > 2 \text{ 或 } \log_2 x < -1, \therefore x > 4 \text{ 或 } 0 < x < \frac{1}{2} \dots (6 \text{分})$$

$$\therefore \text{不等式的解集是 } (0, \frac{1}{2}) \cup (4, +\infty) \dots (7 \text{分})$$

12.

$$(2) \because x \in [1, 4], \therefore t \in [0, 2], \dots (8 \text{分})$$

$$\therefore f(x) = g(t) = (t - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}, \dots (9 \text{分})$$

$$\therefore f_{\min}(x) = g(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}, \dots (11 \text{分})$$

$$f_{\max}(x) = g(2) = 0, \dots (13 \text{分})$$

$$\therefore f(x) \text{ 的值域是 } [-\frac{9}{4}, 0] \dots (14 \text{分})$$