高三一诊数学试题参考答案

选择题答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	C	D	A	D	A	D	**BC**	CD	BCD	CD

三、填空题

13. $-\frac{1}{3}$；　14. $\frac{9}{2}$　**15.** $\frac{3}{2}$　**16.** 60 ；　$240x^6$

四、解答题

17.解(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=2x+\frac{1}{x}-\ln x$，$f'(x)=2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$，又 $f'(1)=0$，$f(1)=3$，

所以曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=3$.……………………………………4 分

(2) $f'(x)=a-\frac{1}{x^2}+\frac{1-a}{x}=\frac{ax^2+(1-a)x-1}{x^2}=\frac{(x-1)(ax+1)}{x^2}$ $(x>0)$，……………………6 分

①当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $-1<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $\left(-\frac{1}{a},\ +\infty\right)$ 上单调递减，在 $\left(1,\ -\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增；

③当 $a=-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

④当 $a<-1$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\ -\frac{1}{a}\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{1}{a},\ 1\right)$ 上单调递增.……10 分

18．解：（1）所满足的三个条件是:②③④，--------------------------------------1 分

$\because f(x)$ 的周期 $T=\pi$，$\therefore \omega=2$，$\therefore f(x)=\sin(2x+\varphi)+m$，------------------------2 分

又过点 $(0,0)$，且 $f(\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}$，$\therefore \sin\varphi+m=0, \sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)+m=\frac{3}{2}$，------------------3 分

$\therefore \sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)-\sin\varphi=\frac{3}{2}$，　$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi-\frac{1}{2}\sin\varphi-\sin\varphi=\frac{3}{2}$，--------------------4 分

$\therefore \sqrt{3}(\frac{1}{2}\cos\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi)=\frac{3}{2}$，$\therefore \sin(\frac{\pi}{6}-\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，--------------------------------5 分

又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，　$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{6}$，　--6 分

又 $\sin\varphi+m=0, \therefore -\frac{1}{2}+m=0, \therefore m=\frac{1}{2}$，---------------------------------------7 分

$\therefore f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$.　------------------------------------8 分

注：如果学生选取条件①③④，

$\because \omega=\dfrac{3}{2}$，$\therefore f(x)=\sin(\dfrac{3}{2}x+\varphi)+m$，　--1 分

又过点（0，0），且 $f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore \sin\varphi+m=0,\sin(\dfrac{\pi}{2}+\varphi)+m=\dfrac{3}{2}$，$\therefore \sin(\dfrac{\pi}{2}+\varphi)-\sin\varphi=\dfrac{3}{2}$，------------------------------2 分

$\therefore \cos\varphi-\sin\varphi=\dfrac{3}{2},\therefore \sqrt{2}\sin(\dfrac{\pi}{4}-\varphi)=\dfrac{3}{2}$，--3 分

又$\because \sqrt{2}<\dfrac{3}{2}$，故此种选择不满足.　--4 分

第（1）问学生选条件①③④求解，能正确做到以上步骤的可给 4 分.

（2）由 $f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}=1$，得 $\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，-----------------------------------9 分

$\therefore 2x-\dfrac{\pi}{6}=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$, 或 $2x-\dfrac{\pi}{6}=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$，---10 分

$\therefore x=k\pi+\dfrac{\pi}{6}$, 或 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，　---11 分

所以，函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=1$ 相邻两个交点间的最短距离为 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$．----12 分

19. 解：依题意：$\overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3,\overline{y}=\dfrac{8+10+13+25+24}{5}=16$ ························2 分

故 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x-\overline{x})(y-\overline{y})=(-2)\times(-8)\div(-1)\times(-6)+1\times9+2\times8=47$

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x-\overline{x})^2=4+1+1+4=10,\sum\limits_{i=1}^{5}(y-\overline{y})^2=64+36+9+81+64=254$ ························4 分

则

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\frac{47}{254}\approx0.19$$

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}\approx15.44$　························8 分

y关于x的回归方程为：ŷ=0.19x+15.44

（2）依题意，女性不愿意参与管理的人数为 50 人························9 分

计算得 k^2 的观测值为

$$k^2=\frac{300\times(150\times50-50\times50)^2}{200\times100\times200\times100}=\frac{300\times5000\times5000}{200\times100\times200\times100}=18.75>10.828$$

故有 99.9%的把握认为村民的性别与参与管理的意愿具有相关性。 ························12 分

20.解

（1）证明：因为 $PC\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PC\perp BC$.

又因为 $BC\perp AC$，所以 $BC\perp$ 平面 PCA，

$PA\subset$ 平面 PCA，所以 $BC\perp PA$. ··4 分

（2）证明：等腰梯形 $ABCD$ 中，设 $BC=1$. 因为 $BC\perp AC$ 且 AC 平分 $\angle BAD$，

所以 $\angle CBA=2\angle CAB=60^\circ$， 所以 $AB=2$，$AC=\sqrt{3}$.

$\triangle DCA$ 中 $CD=AD$，$\angle DAC=\angle DCA=30^\circ$，

所以 $CD=1$. ··5 分

以 C 为原点，以 CB，CA，CP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系. $C(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$A(0,\sqrt{3},0)$，$D(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$P(0,0,a)$，

平面 $ABCD$ 法向量 $\boldsymbol{n}_0=(0,0,1)$，设平面 PAB 法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$

有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3}a,a,\sqrt{3})$，$\cos60^\circ=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2+3}}=\frac{1}{2}$，

所以 $a=\frac{3}{2}$（几何法求出也对应给分）·······························8 分

平面 PAC 法向量 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$，平面 PAD 法向量 $\boldsymbol{n}_3=(x,y,z)$，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_3\cdot\overrightarrow{PD}=0\\ \boldsymbol{n}_3\cdot\overrightarrow{PA}=0\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}_3=(-3,\sqrt{3},2)$. ····································10 分

$|\cos\langle\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3\rangle|=\frac{3}{\sqrt{9+3+4}}=\frac{3}{4}$，

所以二面角 $D-PA-C$ 的余弦值为 $\frac{3}{4}$. ································12 分

21.解（1）已知每只小白鼠接种后当天出现 Z 症状的概率均为 $\frac{1}{4}$,每次试验间相互独立，

所以，一只小白鼠第一天出现 Z 症状的概率为 $p_1=\frac{1}{4}$

第二天出现 Z 症状的概率为 $p_2=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$

能参加第三天试验但不能参加下一个接种同期的概率为：$p_3=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$ ...3 分

∴一只小白鼠至多参加一个接种周期试验的概率为：

$P=p_1+p_2+p_3==\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}=\frac{37}{64}$ ....4 分

（Ⅱ）设事件 C 为“在一个接种周期内出现 2 次或 3 次 Z 症状”，则

$P(C)=C_3^2(\frac{1}{4})^2\times\frac{3}{4}+C_3^3(\frac{1}{4})^3=\frac{5}{32}$; ....6 分

随机变量 X 可能的取值为 1，2，3，则

$P(X=1)=P(C)=\frac{5}{32}$;

$P(X=2)=[1-P(C)]\cdot P(C)=(1-\frac{5}{32})\times\frac{5}{32}=\frac{135}{1024}$;

$P(X=3)=[1-P(C)]\cdot[1-P(C)]\times 1=\frac{729}{1024}$; ....10 分

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{5}{32}$	$\frac{135}{1024}$	$\frac{729}{1024}$

................................11 分

随机变量 X 的数学期望为：

$E(X)=1\times\frac{5}{32}+2\times\frac{135}{1024}+3\times\frac{729}{1024}=\frac{2617}{1024}$ ....12 分

22.

解 (1)设$\varphi(x)=4\ln x+\frac{2x+1}{x^2}+a-3-(\frac{1}{x}-1)^2-a=4(\ln x+\frac{1}{x}-1)$，

其定义域为$(0,+\infty)$，$\varphi'(x)=4(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})=\frac{4(x-1)}{x^2}$．

…………2 分

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$.

故 $\varphi(x)$在$(0,1)$上是减函数，在$(1,+\infty)$上是增函数，

所以 $x=1$ 是 $\varphi(x)$的极小值点，也是 $\varphi(x)$的最小值点，即 $\varphi(x)\geq\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=0$，

故 $f(x)\geq(\frac{1}{x}-1)^2+a$ 成立.

…………………………5 分

(2)函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{4}{x}-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^2}=\frac{2(2x+1)(x-1)}{x^3}$，

当$0<x<1$时，$f'(x)<0$；当$x>1$时，$f'(x)>0$；

所以$f(x)$在$(0,1)$上是减函数，在$(1,+\infty)$上是增函数，

所以$x=1$是$f(x)$的极小值点，也是$f(x)$的最小值点，即$f(x)_{\min}=f(1)=a$.

(i)若$a=0$，$f(x)-g(x)=\frac{2x+1}{x^2}-3=-\frac{(x-1)(3x+1)}{x^2}$.

当$0<x<1$时，$f(x)>g(x)$；当$x=1$时，$f(x)=g(x)$；当$x>1$时，$f(x)<g(x)$，

所以$h(x)=\begin{cases} f(x), 0<x<1, \\ g(x), x\geq 1, \end{cases}$

此时，$h(x)$只有一个零点$x=1$；　　………………7分

(ii)若$a>0$，$f(x)-g(x)=-\frac{(x-1)(3x+1)}{x^2}+a$，

当$0<x\leq 1$时，$f(x)>g(x)$，则$h(x)=f(x)\geq a>0$；

当$x>1$时，$f(x)>a>0$，$g(x)>0$，则$h(x)>0$.

此时$h(x)$没有零点；　　………………………………9分

(iii)若$a<0$，当$0<x<1$时，根据（1）知，$f(x)\geq(\frac{1}{x}-1)^2+a$.

而$0<\frac{1}{\sqrt{-a}+1}<1$，所以$f(\frac{1}{\sqrt{-a}+1})>(\sqrt{-a}+1-1)^2+a=0$，

又$f(x)_{\min}=f(1)=a<0$，所以$f(x)$在$(0,1)$上只有一个零点x_0，

从而一定存在$c\in(x_0,1)$，使得$f(c)=g(c)$，即$\frac{2c+1}{c^2}+a-3=0$，

即$3-a=\frac{2c+1}{c^2}$.

当$x>c$时，

$g(x)-f(x)=-\frac{2x+1}{x^2}-a+3=-\frac{2x+1}{x^2}+\frac{2c+1}{c^2}=\frac{x-c}{cx}(\frac{c+x}{cx}+2)>0$，

所以$g(x)>f(x)$，从而$h(x)=\begin{cases} f(x), 0<x\leq c, \\ g(x), x>c, \end{cases}$

从而 $h(x)$在$(0,c)$上有一个零点 x_0，在$(c,+\infty)$上有一个零点 1.
此时，当 $a<0$ 时，$h(x)$有两个零点.
综上，当 $a=0$ 时，$h(x)$有一个零点；当 $a>0$ 时，$h(x)$没有零点；
当 $a<0$ 时，$h(x)$有两个零点. …………………12 分