探究性学习:让数学教学更有效

薛安定
江苏省南京市中华中学 210019

[摘 要] 探究性学习,是学生数学学习的一种重要行为,也是深度学习的表现形式. 结合理论研究与教学实践,尝试在开放式教学、变式教学、习题教学中,引导学生探究学习,以提高学生的数学探究能力和数学核心素养.

[关键词] 开放式教学;变式教学;习题教学;探究性;高中数学

探究性学习,是学生数学学习的一种重要行为,也是深度学习的表现形式. 它基于基础性学习与拓展性学习的融合,鼓励学生利用已学知识,去解决现实中的有关问题. 探究性学习的基本特点是以学生自主探究与实践为主,通过学生之间的相互交流与合作,实现共同提高的目的. 教学中,教师应积极为学生搭建探究性学习的平台,从所学内容的实际出发,通过数学问题营造学生自主探究,合作学习的氛围,让数学探究性学习渗透到日常教学的每一堂课中去. 笔者结合理论研究与教学实践,尝试在开放式、变式、习题教学中,引导学生探究学习,以提高学生的数学探究能力和数学核心素养.

⇩开放式教学中,引导探究性学习

开放性教学,也是引导学生进行探究性学习的一种重要的教学方法. 这种教学的特点是引导学生大胆质疑,发现问题、提出问题并解决问题.

比如,在数列教学中,学生通过等差数列与等比数列的学习,了解并掌握了等差数列与等比数列的一些性质和研究等差数列与等比数列的一些方法,笔者以开放性问题的形式,让学生通过对开放性问题的探究和解决,有效提高了学生发散性思维的层次与解决数学问题的能力.

例1: 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若对任意正整数n,总存在正整数m,使得$S_n=a_m$,则称数列$\{a_n\}$为$S_{数列}$. (1)$S_{数列}$的任意一项是否可以写成其某两项的差?请说明理由. (2)①是否存在等差数列为$S_{数列}$,若存在,请举例说明;若不存在,请说明理由. ②是否存在正项且公比大于2的递增等比数列为$S_{数列}$,若存在,请举例说明;若不存在,请说明理由.

本题是一道开放性探究题,对于问题(1),要求根据对新数列的定义,利用$a_n=S_n-S_{n-1}$进行计算证明. 对于问题(2),需假设成立,然后利用恰当方法进行探究:①假设存在等差数列,根据数列的公差进行分类讨论即可;②用反证法证明,假设存在满足题意的数列,结合数列$\{S_{n+1}\}$的单调性,推出矛盾. 限于篇幅,本文只引导学生分析问题(2).

(2)①假设存在等差数列为$S_{数列}$,设其首项为a_1,公差为d,

当$d=0$时,若$a_1\neq 0$,则对任意的正整数n,不可能存在正整数m,使得$S_n=a_m$,即$na_1=a_1$.

当$d=0$且$a_1=0$时,显然满足题意.

当$d\neq 0$时,由$S_n=a_m$得,$na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=a_1+(m-1)d$,故$m-1=\frac{(n-1)a_1+\frac{n(n-1)}{2}d}{d}=(n-1)\frac{a_1}{d}+\frac{n(n-1)}{2}\in\mathbf{Z}$.

因为$\frac{n(n-1)}{2}\in\mathbf{Z}$,$n=1$时显然存在$m=1$满足上式,$n=2$时,$\frac{a_1}{d}+1\geqslant 0$,所以$\frac{a_1}{d}\geqslant -1$,$\frac{a_1}{d}\in\mathbf{Z}$,此时$(n-1)\frac{a_1}{d}+\frac{n(n-1)}{2}\geqslant -n+1+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}\geqslant 0$符合题意,综上,存在$a_1=kd$,$k\in\mathbf{Z}$,$k\geqslant -1$满足题意.

②假设存在正项且公比大于2的等比数列$\{a_n\}$为$S_{数列}$,则对任意正整数n,总存在正整数m,使得$S_n=a_m$,且满足$a_n>0$,

作者简介:薛安定(1977—),本科学历,中学高级教师,从事高中数学教学与试题研究工作.

$q>2$.

因为 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}=\frac{q^{n+1}-1}{q^n-1}=q+\frac{q-1}{q^n-1}<q+\frac{q-1}{\frac{q+1}{q}-1}=q+q(q-1)=q^n$,所以 $q<\frac{S_{n+1}}{S_n}<q^2$,即 $a_mq<S_{n+1}<a_mq^2$,即 $a_{m+1}<S_{n+1}<a_{m+2}$.(*)

因为数列 $\{a_n\}$ 单调递增,所以不存在某项介于相邻两项 a_{m+1} 与 a_{m+2} 之间,所以根据(*)式可知 S_{n+1} 不是数列 $\{a_n\}$ 中的某项,这与 $S_{数列}$ 的定义矛盾. 故不存在正项且公比大于2的等比数列为 $S_{数列}$.

本题基于教材又高于教材,学生在开放问题的探究中掌握研究数学的基本方法,数学思维得到进一步提升与拓展. 教学实践发现,教学中,教师如能经常性地选择与教学内容有关的问题进行发散性探究,对培养学生的发散思维和创新思维能力具有重要作用.

变式教学中,引导探究性学习

变式教学,是引导学生进行探究性学习最常见的教学形态,其通常以问题串为思维导向,由浅入深,由简单到复杂,环环相扣,让学生探究起来,干劲十足,欲罢不能. 在教学中,教师可以通过变化命题的条件或结论,产生新的问题,引导学生进行探究性学习,以提高教学的有效性.

如,在函数复习中,笔者尝试以一道函数题为题源进行变式教学,引导学生进行探究性学习,课堂氛围热烈,实现了有效教学.

例2:函数 $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ 的图像关于______对称.

分析:判断这个函数是否是奇函数,若是奇函数,那么它的图像关于原点对称. 因为该函数定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)+f(x)=\lg(-x+\sqrt{(-x)^2+1})+\lg(x+\sqrt{x^2+1})=\lg(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})=\lg1=0$,所以该函数图像关于原点对称.

变式1:已知函数 $y=f(x)$ 满足 $f(-x+1)=-f(x+1)$,则 $y=f(x)$ 的图像的关于______对称.

变式2:已知函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=2$,则函数 $y=f(x)$ 的图像关于______对称.

变式3:已知函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)+f(2+x)=2$,则 $y=f(x)$ 的图像关于______对称.

变式4:已知 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$,求证:(1)$f(x)+f(1-x)=1$;(2)指出该函数图像的对称中心,并说明理由;(3)求 $f\left(\frac{1}{1001}\right)+f\left(\frac{2}{1001}\right)+\cdots+f\left(\frac{1000}{1001}\right)$ 的值.

变式5:

求证:二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 的图像没有对称中心.

本题及变式,出自笔者高考函数复习的备课. 笔者立足基本知识点,引导学生注重类题训练,实施一题多变的探究性训练,让学生积极进行探究性学习,有效激活了学生的思维,教学效果显著.

习题教学中,引导探究性学习

互联网背景下,学生手中的资料层出不穷,刷题式学习已成为常态. 如何把学生从题海的痛苦中解救出来?是一个值得研究的重要课题. 笔者以为,学生不应使用过于泛滥的复习资料,而应力求资料精简有效.

比如,在必修2的立体几何的球的切接问题的习题课上,笔者要求学生以学习小组形式查阅资料,整理题型,并归纳解题方法,课上,由学生来讲解. 有一个小组的学生选择了下面一个例题,经过集体探究,得到四种解法,并做了评注,令人叹服.

例3:四个半径为 R 的球两两外切,其中三个球在水平桌面上,第四个球放在这三个球之上,在这四个球的中央放一个最大的小球,求这个小球的半径.

生1:当这个小球与其余四个球均相外切时才能达到最大,它们的相互位置十分对称,因此,只要联结4个球的球心构成正四面体,最大小球的球心一定在正四面体中心,可考虑用体积分割.

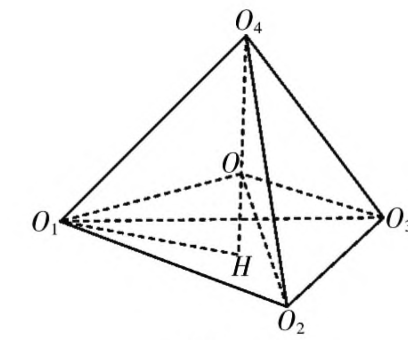

图1

生2:用降维思想转化到 $\mathrm{Rt}\triangle OHO_1$ 中求解.

生3:过 O 点作 $OE\perp O_1O_4$ 于 E,在 $\mathrm{Rt}\triangle O_4EO$ 中求.

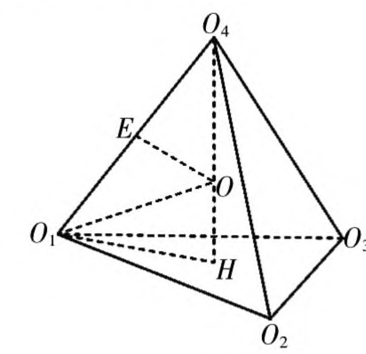

图2

生4:既然它们的相互位置十分对称,那么可考虑构造一个正方体来处理. 如图3所示,构造正方体,由于面对角线长度为 $2R$,所以正方体的棱长为 $\frac{2R}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}R$,所以正方体的体对角线的长度为 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}R=\sqrt{6}R$,所以 $OO_1=\frac{\sqrt{6}R}{2}=R+r$,所以 $r=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)R$.

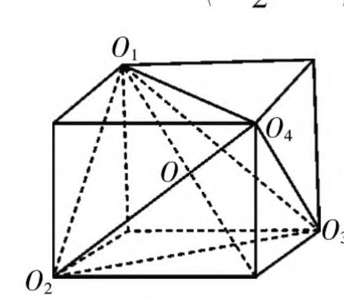

图3

学生发现,生4充分利用图形对称性构造正方体求解,明显比上述解法简洁得多,关键是把握了图形特征. 合作的力量是无限的,学生合作学习,通过探究,往往能起到1+1>2的效果,更能体现探究性学习的价值.

总而言之,探究性学习虽然不适于所有教学内容,但它作为学生一种深度学习的方式,教师应该积极为学生搭建探究性学习的平台,当这种学习形式成为学生学习的一种常态时,相信学生的数学探究能力和数学核心素养必将有长足的进步.