

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第二学期高二数学

周三练习 5

21.3.24

一、单选题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

1. 从集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 中任取两个互不相等的数 a, b , 组成复数 $a + bi$, 其中虚数有()

- A. 36 个 B. 42 C. 30 个 D. 35 个

2. 复数 $\frac{1}{1+2i} + \frac{i}{2}$ 的共轭复数的虚部为()

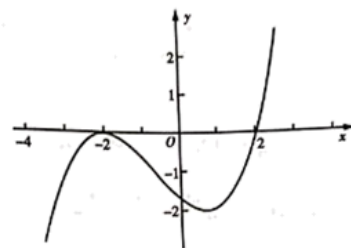
- A. $\frac{1}{10}$ B. $-\frac{1}{10}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $-\frac{3}{10}$

3. 一质点做直线运动, 经过 t 秒后的位移为 $S = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t$, 则速度为零的时刻是()

- A. 1 秒末 B. 4 秒末 C. 1 秒与 4 秒末 D. 0 秒与 4 秒末

4. 函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, $f'(x)$ 的图象如图所示, 则关于 $f(x)$ 的判断错误的是()

- A. $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递减
B. $x = 2$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点
C. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线斜率小于零
D. $x = -2$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点



5. 在四棱锥 $S - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, 且 $\angle ABC = 90^\circ$,

$SA \perp$ 平面 $ABCD$, $SA = AB = BC = 2AD = 1$, 则 SC 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 不等式 $\sin x \cdot f(x) < \cos x \cdot f'(x)$ 恒成立, 则下列不等式错误的是()

- A. $f(\frac{\pi}{3}) > \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$ B. $f(\frac{\pi}{3}) > 2\cos 1 \cdot f(1)$
C. $f(\frac{\pi}{4}) < \sqrt{2}\cos 1 \cdot f(1)$ D. $f(\frac{\pi}{4}) < \frac{\sqrt{6}}{2}f(\frac{\pi}{6})$

二、多选题（本大题共 2 小题，共 10 分）

7. 已知 i 为虚数单位, 复数 z 满足 $z(2 - i) = i^{2020}$, 则下列说法错误的是()

- A. 复数 z 的模为 $\frac{1}{5}$
B. 复数 z 的共轭复数为 $-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$
C. 复数 z 的虚部为 $\frac{1}{5}i$
D. 复数 z 在复平面内对应的点在第一象限

8. 使函数 $y = x\sin x + \cos x$ 是增函数的区间可能是()

- A. $(0, \frac{\pi}{2})$ B. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ C. $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ D. $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. 函数 $f(x) = x \ln x$ 的单调减区间是_____.

10. 已知函数 $f(x) = x - e^x$ ，则函数 $f(x)$ 的值域为_____.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，若直线 $y = x + m$ 与曲线 $y = a \sin x + b \cos x (a, b, m \in \mathbb{R})$ 相切于点 $(0, 1)$ ，则 $\frac{a+b}{m}$ 的值为_____.

12. 设函数 $y = f(x)$ 图象上在不同两点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 处的切线斜率分别是 k_A ， k_B ，规定 $\varphi(A, B) = \frac{|k_A - k_B|}{|AB|}$ ($|AB|$ 为 A 与 B 之间的距离) 叫作曲线 $y = f(x)$ 在点 A 与点 B 之间的“弯曲度”.

若函数 $y = x^2$ 图象上两点 A 与 B 的横坐标分别为 0，1，则 $\varphi(A, B) = \underline{(1)}$ ；

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 为曲线 $y = e^x$ 上两点，且 $x_1 - x_2 = 1$ ，若 $m \cdot \varphi(A, B) < 1$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 $\underline{(2)}$.

四、解答题（本大题共 2 小题，共 24.0 分）

13. 设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ ，(其中 i 为虚数单位，且 $i^2 = -1$)

(1) 若 $|z|^2 - 2z = 7 + 4i$ ，求 z ；

(2) 若 $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + \cdots + 2020i^{2019} + 2021i^{2020}$ ，求 $a - b$ 的值.

14. 设函数 $f(x) = [ax^2 - (4a + 1)x + 4a + 3]e^x$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行，求 a ；

(2) 若 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极小值，求 a 的取值范围.

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第二学期高二数学

周三练习 5

21.3.24

一、单选题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

1. 从集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 中任取两个互不相等的数 a, b , 组成复数 $a + bi$, 其中虚数有()

- A. 36 个 B. 42 C. 30 个 D. 35 个

【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查分步计数原理，考查了运算能力，属于基础题.

首先确定虚部的个数，然后再确定实部的个数，再由乘法原理可求得虚数的个数.

【解答】

解： $\because a, b$ 互不相等且为虚数，

$\therefore$ 所有 b 只能从 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 中选一个，共有 6 种选法，

a 从剩余的 6 个选一个有 6 种，

$\therefore$ 根据分步计数原理知虚数有 $6 \times 6 = 36$ (个).

故选 A.

2. 复数 $\frac{1}{1+2i} + \frac{i}{2}$ 的共轭复数的虚部为()

- A. $\frac{1}{10}$ B. $-\frac{1}{10}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $-\frac{3}{10}$

【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的基本概念，是基础题.

直接利用复数代数形式的乘除运算化简得答案.

【解答】

解： $\because \frac{1}{1+2i} + \frac{i}{2} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} + \frac{i}{2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i + \frac{i}{2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i$,

$\therefore$ 复数 $\frac{1}{1+2i} + \frac{i}{2}$ 的共轭复数为 $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}i$.

$\therefore$ 复数 $\frac{1}{1+2i} + \frac{i}{2}$ 的共轭复数的虚部为 $-\frac{1}{10}$.

故选：B.

3. 一质点做直线运动，经过 t 秒后的位移为 $S = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t$, 则速度为零的时刻是()

- A. 1 秒末 B. 4 秒末 C. 1 秒与 4 秒末 D. 0 秒与 4 秒末

【答案】C

【解析】解：根据题意，质点经过 t 秒后的位移为 $S = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t$ ，则有 $S' = t^2 - 5t + 4$ ，

质点的速度的解析式为 $v(t) = t^2 - 5t + 4$ ，

令 $v(t) = t^2 - 5t + 4 = 0$ ，解可得 $t = 1$ 或 4 ，

即 1 秒与 4 秒末质点的速度为 0；

故选：C.

根据题意，求出 S 的导数，即可得质点速度的解析式，令 $v(t) = 0$ ，解可得 t 的值，即可得答案.

本题考查导数的定义，注意求出速度的解析式，属于基础题.

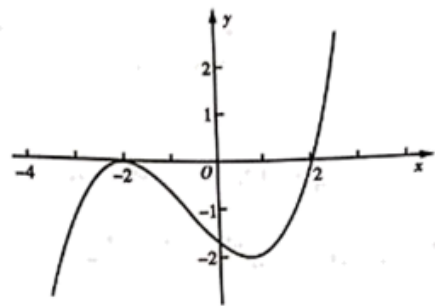
4. 函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ， $f'(x)$ 的图象如图所示，则关于 $f(x)$ 的判断错误的是()

A. $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递减

B. $x = 2$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点

C. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线斜率小于零

D. $x = -2$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点



【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查导函数的应用，涉及到导数的几何意义、函数的单调性和极值，属于基础题.

根据导函数图像可得 $x < 2, f'(x) \leq 0, x > 2, f'(x) > 0$ ，得出 $f(x)$ 单调区间和极值点，即可得出结论.

【解答】

解：由 $f'(x)$ 图象可得 $x < 2, f'(x) \leq 0, x > 2, f'(x) > 0$ ，

$f(x)$ 单调递减区间是 $(-\infty, 2)$ ，单调递增区间是 $(2, +\infty)$ ，

$\therefore x = 2, f(x)$ 取得极小值，所以选项 A, B, C 正确，选项 D 错误.

故选 D.

5. 在四棱锥 $S - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，且 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $SA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $SA = AB = BC = 2AD = 1$ ，则 SC 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为()

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【解析】

【试题解析】

【分析】

本题考查了求线与面的夹角问题，考查向量的加法运算和数量积，属于中档题.

$\overrightarrow{AS}$ 是平面 $ABCD$ 的法向量，用 $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AS}$ 表示 $\overrightarrow{CS}$ ，然后直接求解 $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CS}$ 以及 $\overrightarrow{AS}$ 和 $\overrightarrow{CS}$ 的模长，然后代入向量夹角计算公式解出 $\overrightarrow{AS}$ 和 $\overrightarrow{CS}$ 的夹角即可得解.

【解答】

解：由题意知 $\overrightarrow{AS}$ 是平面 $ABCD$ 的法向量，设 $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{AS}$ 的夹角为 φ ,

$$\therefore \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS}, \therefore \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{AS} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS}) = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS}^2 = 1,$$

$$\text{又} |\overrightarrow{AS}| = 1, |\overrightarrow{CS}| = \sqrt{(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS})^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CS}}{|\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{CS}|} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore SC \text{与平面 } ABCD \text{ 所成角的余弦值为 } \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

故选 A.

6. 对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，不等式 $\sin x \cdot f(x) < \cos x \cdot f'(x)$ 恒成立，则下列不等式错误的是()

A. $f(\frac{\pi}{3}) > \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$

B. $f(\frac{\pi}{3}) > 2\cos 1 \cdot f(1)$

C. $f(\frac{\pi}{4}) < \sqrt{2}\cos 1 \cdot f(1)$

D. $f(\frac{\pi}{4}) < \frac{\sqrt{6}}{2}f(\frac{\pi}{6})$

【答案】D

【解析】解：构造函数 $g(x) = f(x)\cos x$,

$$\text{则 } g'(x) = \cos x \cdot f'(x) - \sin x \cdot f(x),$$

$$\therefore \sin x \cdot f(x) < \cos x \cdot f'(x),$$

$$\therefore g'(x) = \cos x \cdot f'(x) - \sin x \cdot f(x) > 0,$$

即 $g(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上为增函数,

$$\text{则 } g(\frac{\pi}{6}) < g(\frac{\pi}{4}),$$

$$\text{即 } f(\frac{\pi}{6})\cos \frac{\pi}{6} < f(\frac{\pi}{4})\cos \frac{\pi}{4},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{2}f(\frac{\pi}{6}) < \frac{\sqrt{2}}{2}f(\frac{\pi}{4}),$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{6}}{2}f(\frac{\pi}{6}) < f(\frac{\pi}{4}),$$

$$\text{又 } g(1) < g\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{即 } f(1)\cos 1 < f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos \frac{\pi}{3},$$

$$\text{即 } f\left(\frac{\pi}{3}\right) > 2\cos 1 \cdot f(1),$$

故错误的是 D .

故选: D .

构造函数 $g(x) = f(x)\cos x$, 求函数的导数, 利用导数研究函数的单调性, 然后利用单调性进行判断即可.

本题主要考查函数的大小比较, 构造函数, 求函数的导数, 研究函数的单调性是解决本题的关键.

二、多选题 (本大题共 2 小题, 共 10 分)

7. 已知 i 为虚数单位, 复数 z 满足 $z(2-i) = i^{2020}$, 则下列说法错误的是()

A. 复数 z 的模为 $\frac{1}{5}$

B. 复数 z 的共轭复数为 $-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

C. 复数 z 的虚部为 $\frac{1}{5}i$

D. 复数 z 在复平面内对应的点在第一象限

【答案】ABC

【解析】

【分析】

本题考查虚数单位 i 的幂运算的周期性, 复数的四则运算, 涉及复数的概念, 复数的模, 共轭复数, 复数的代数表示及其几何意义, 属于基础题.

先由 $z(2-i) = i^{2020}$ 计算出 $z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$, 再根据选项判断即可.

【解答】

$$\text{解: } z(2-i) = i^{2020}, \text{ 则 } z = \frac{i^{2020}}{(2-i)} = \frac{(i^4)^{505}}{(2-i)} = \frac{1}{(2-i)} = \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i,$$

$$\therefore |z| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 故 } A \text{ 错},$$

复数 z 的共轭复数为 $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$, 故 B 错;

复数 z 的虚部为 $\frac{1}{5}$, 故 C 错;

复数 z 在复平面内对应的点为 $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, 在第一象限, 故 D 正确.

故选 ABC.

8. 使函数 $y = x \sin x + \cos x$ 是增函数的区间可能是()

A. $(0, \frac{\pi}{2})$

B. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

C. $(\pi, \frac{3\pi}{2})$

D. $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

【答案】AD

【解析】

【分析】

本题考查利用导数研究函数的单调性问题，考查三角函数的性质，是基础题.

对给定函数求导后，把选项依次代入，看哪个 y' 恒大于 0，就是哪个选项.

【解答】

解: $y' = (x \sin x + \cos x)'$

$$= \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x,$$

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ 时, 恒有 $x \cos x > 0$.

故选: AD.

三、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

9. 函数 $f(x) = x \ln x$ 的单调减区间是_____.

【答案】 $(0, \frac{1}{e})$

【解析】

【分析】

本题主要考查了利用导数求函数的单调区间, 属于基础题.

求出 $f'(x) = \ln x + 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解不等式即可.

【解答】

解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \ln x + 1$,

由 $f'(x) < 0$ 得 $\ln x + 1 < 0$, 得 $\ln x < -1$, 得 $0 < x < \frac{1}{e}$,

即函数 $f(x) = x \ln x$ 的单调递减区间为 $(0, \frac{1}{e})$

10. 已知函数 $f(x) = x - e^x$, 则函数 $f(x)$ 的值域为_____.

【答案】 $(-\infty, -1]$

【解析】

【解答】

解：令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = 0$ ，

$\therefore f(x) = x - e^x$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增，在 $(0, +\infty)$ 单调递减，最大值为 $f(0) = -1$ ，

所以值域为 $(-\infty, -1]$ 。

故答案为 $(-\infty, -1]$ 。

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，若直线 $y = x + m$ 与曲线 $y = asinx + bcosx (a, b, m \in R)$ 相切于点 $(0, 1)$ ，则 $\frac{a+b}{m}$ 的值为_____。

【答案】2

【解析】解：根据题意，若直线 $y = x + m$ 与曲线 $y = asinx + bcosx (a, b, m \in R)$ 相切于点 $(0, 1)$ ，则点 $(0, 1)$ 为直线 $y = x + m$ 与 $y = asinx + bcosx$ 的交点，

则有 $\begin{cases} 1 = 0 + m \\ 1 = asin0 + bcos0 \end{cases}$ ，解可得 $m = 1, b = 1$ ，

又由 $y = asinx + bcosx$ ，则 $y' = acosx - bsinx$ ，

又由 $y'|_{x=0} = acos0 - bsin0 = 1$ ，解可得 $a = 1$ ，

则 $\frac{a+b}{m} = \frac{1+1}{1} = 2$ ；

故答案为：2。

12. 设函数 $y = f(x)$ 图象上在不同两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 处的切线斜率分别是 k_A, k_B ，规定 $\varphi(A, B) =$

$\frac{|k_A - k_B|}{|AB|}$ ($|AB|$ 为 A 与 B 之间的距离) 叫作曲线 $y = f(x)$ 在点 A 与点 B 之间的“弯曲度”。

若函数 $y = x^2$ 图象上两点 A 与 B 的横坐标分别为 0, 1，则 $\varphi(A, B) = \underline{(1)}$ ；

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 为曲线 $y = e^x$ 上两点，且 $x_1 - x_2 = 1$ ，若 $m \cdot \varphi(A, B) < 1$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 $\underline{(2)}$ 。

【答案】 $\sqrt{2}$; $(-\infty, 1]$

【解析】解：函数 $y = x^2$ 的导数为 $y' = 2x$ ，可得 $k_A = 0, k_B = 2, |AB| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ，

$\varphi(A, B) = \frac{|0-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ；

由 $y = e^x$ 得 $y'(x) = e^x$ ，

$\therefore A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 为曲线 $y = e^x$ 上两点，且 $x_1 - x_2 = 1$ ，

$\therefore \varphi(A, B) = \frac{|e^{x_1} - e^{x_2}|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (e^{x_1} - e^{x_2})^2}}$ ，

$\therefore m \cdot \varphi(A, B) < 1$ 恒成立，

$\therefore m|e^{x_1} - e^{x_2}| < \sqrt{1 + (e^{x_1} - e^{x_2})^2}$ ，

则 $m < \frac{\sqrt{1 + (e^{x_1} - e^{x_2})^2}}{|e^{x_1} - e^{x_2}|} = \sqrt{1 + \frac{1}{(e^{x_1} - e^{x_2})^2}}$ ，

$\therefore \sqrt{1 + \frac{1}{(e^{x_1} - e^{x_2})^2}} > 1, \therefore m \leq 1$ ，

则实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$ ，

故答案为: $\sqrt{2}; (-\infty, 1]$.

四、解答题 (本大题共 2 小题, 共 24.0 分)

13. 设复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, (其中 i 为虚数单位, 且 $i^2 = -1$)

(1) 若 $|z|^2 - 2z = 7 + 4i$, 求 z ;

(2) 若 $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + \cdots + 2020i^{2019} + 2021i^{2020}$, 求 $a - b$ 的值.

【答案】解: (1) 由已知可得, $a^2 + b^2 - 2a + 2bi = 7 + 4i$,

$$\therefore \begin{cases} a^2 + b^2 - 2a = 7, \\ 2b = 4 \end{cases}$$

$$\text{解之得} \begin{cases} a = 3, \\ b = 2 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} a = -1, \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore z = 3 + 2i \text{ 或 } z = -1 + 2i$$

(2) 由复数相等的性质, 可知 $a = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \cdots - 2019 + 2021 = 1 + \overset{2+2+\cdots+2}{505 \text{ 个}} = 1011$,

$$b = 2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + \cdots + 2018 - 2020 = - \overset{(2+2+\cdots+2)}{505 \text{ 个}} = -1010.$$

$$\therefore a - b = 2021.$$

另解: $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + \cdots + 2020i^{2019} + 2021i^{2020}$ ①

$$\therefore zi = 1i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + 5i^5 + \cdots + 2020i^{2020} + 2021i^{2021}$$
 ②

$$\therefore \text{①} - \text{②} \text{ 得: } z(1 - i) = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \cdots + i^{2020} - 2021i^{2021} = 1 - 2020i$$

$$\therefore z = \frac{1-2021i}{1-i} = \frac{(1-2021i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2022-2020i}{2} = 1011 - 1010i,$$

$$\therefore a = 1011, b = -1010,$$

$$\therefore a - b = 2021.$$

14. 设函数 $f(x) = [ax^2 - (4a + 1)x + 4a + 3]e^x$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行, 求 a ;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极小值, 求 a 的取值范围.

【答案】解: (1) 函数 $f(x) = [ax^2 - (4a + 1)x + 4a + 3]e^x$ 的导数为

$$f'(x) = [ax^2 - (2a + 1)x + 2]e^x,$$

由题意可得曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 0,

$$\text{可得 } (a - 2a - 1 + 2)e = 0, \text{ 且 } f(1) = (a + 2)e \neq 0,$$

$$\text{解得 } a = 1;$$

(2) $f(x)$ 的导数为 $f'(x) = [ax^2 - (2a + 1)x + 2]e^x = (x - 2)(ax - 1)e^x$,

①当 $a < 0$ 时, 则 $\frac{1}{a} < 2$, 此时 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, 2)$ 递增; 在 $(2, +\infty)$, $(-\infty, \frac{1}{a})$ 递减,

可得 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极大值, 不符题意;

②当 $a = 0$ 时, 若 $x < 2$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; 若 $x > 2$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减,

可得 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极大值, 不符题意;

③当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 则 $\frac{1}{a} > 2$, 此时 $f(x)$ 在 $(2, \frac{1}{a})$ 递减; 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$, $(-\infty, 2)$ 递增,

可得 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极大值, 不符题意;

④当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 此时 $f'(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 e^x \geq 0$, $f(x)$ 在 R 上递增, 无极值, 不符合题意;

⑤当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 则 $\frac{1}{a} < 2$, 此时 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, 2)$ 递减; 在 $(2, +\infty)$, $(-\infty, \frac{1}{a})$ 递增,

可得 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极小值, 满足题意.

综上可得, a 的取值范围是 $(\frac{1}{2}, +\infty)$.