# 数学抽象素养培养策略①

林京榕[1]　陈清华[2]　董　涛[2]

(1.福建省尤溪第一中学　365100;2.福建师范大学数学与信息学院　350117)

数学抽象是指舍去事物的一切物理属性,得到数学研究对象的思维过程.[1]数学抽象有利于学生真正理解数学知识,养成独立获取数学知识的能力.多种教学策略的灵活有效运用,能够更为有效地培养学生的数学抽象素养.本文结合具体实例,讨论数学抽象素养落实于课堂教学的途径.

## 1　经历数学概念的抽象

数学概念具有高度的抽象性、系统性和逻辑性.它的形成通常经历两种不同层次的抽象过程;一种是从数学外部的事物出发,经过数学化抽象出数学概念;另一种是在数学内部,对已有数学概念的进一步抽象.数学概念的形成,是最基础的数学抽象过程.章建跃给出数学概念教学的基本环节[2],包含创设问题情境、共性分析与概括本质属性、下定义、概念辨析、概念初步应用、概念"精致"六个基本环节.学生经历上述概念形成环节,会从中学会数学抽象的基本过程:分离属性与发现模式——建构模型与普适化——定义与符号化——系统化.

导数概念的教学,就是一个典型的数学概念抽象过程.有教师这样设计实施导数概念的抽象过程.首先是背景引入.教师简要介绍微积分简史,激发学生学习兴趣.从运动学的角度出发,引出学习问题.教师要求学生自己计算高台跳水运动员在某段时间内的平均速度,引导学生发现平均速度不能准确反映运动员在这一时间段里任意时刻的运动状态.由平均速度的局限性,引出学习瞬时速度的必要性.学生在高一年级的物理课程中学习过瞬时速度的含义,很容易认识到这一点.

其次是一个具体例证的属性分析.针对高台跳水现象,提出问题"如何计算瞬时速度?"在给予学生指导基础上,引导学生"以已知探求未知",从平均速度入手,寻求解决计算瞬时速度的思路.学生通过计算某时刻当 $\Delta t$ 取不同值时的平均速度,发现平均速度的变化趋势:在时间间隔越来越小时,在某一时刻的平均速度逐渐趋于一个不变的常数.学生认识到这个常数就是物体在这一时刻的瞬时速度.这是第一次概括.接着指导学生计算第二个时刻的瞬时速度,引导学生归纳这两个时刻的瞬时速度计算过程与结果,概括出任意时刻的瞬时速度概念.这是第二次概括.

第三,建立瞬时速度的符号表示.从特殊时刻上升到任意时刻 $t=t_0$ 的瞬时速度,一般化表示为:$\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}$,当 $\Delta t$ 趋近于 0 时,平均速度趋近的确定值.

第四,第二个具体例证的属性验证.从几何的角度,借助抛物线的割线逼近切线的问题,探讨切线斜率的含义.教师用几何画板演示抛物线的割线逼近切线的过程,引导学生发现割线斜率逼近切线斜率.要求学生仿照求瞬时速度的方法求得特定抛物线在任意点处的斜率.学生会发现,两类不同背景的问题形式表达的一致性.为概括不同例证的本质属性奠定基础.符号的使用,省略了研究对象的实际情境,抛弃了实际情境中存在的具体意义,去掉了实际语言带来的差别,带来了结论的一般化,极大地方便模式的识别与构建.

第五,概括出不同例证的本质属性.结合瞬时速度与曲线切线斜率,去掉物理背景和几何背景,归纳概括两个例证的共同属性——瞬时变化率,

① 基金项目:本文系全国教育科学"十三五规划 2016 年度教育部重点课题"高中生数学核心素养培养的策略及评价研究(课题编号 DHA160364)部分研究成果

抽象出瞬时变化率的本质属性.

第六,下定义.基于概括出的两类变化率问题的共同本质和共同形式,将其应用到一般函数,抽象出导数的概念,并用符号表示.学生认识到导数就是瞬时变化率,初步理解导数内涵.

第七,建立符号表示、数学意义和背景含义之间的联系.首先,回溯两个例证,指导学生复盘研究过程,重新梳理两个例证中的背景含义、数学意义与符号表示,形成前后一致的整体认识.其次,要求学生做一些求具体函数导数的练习题,在做题中进一步融会贯通符号表示与本质含义.

这一导数概念的教学过程,灵活运用了概念教学的六个环节,有层次地抽象概括,帮助学生多角度地认识、理解导数概念.

## 2 经历数学命题的概括

数学知识,除了概念外,还有大量的以命题形式表达的数学公式、定理等.这些知识的发现,也是基于考察一些典型例证,概括出它们的共同规律得到的.例如二项式定理,先指导学生分析 $n=2,3,4$ 时二项式 $(a+b)^n$ 的展开式的共同特征,归纳出 $(a+b)^n$ 展开式.但很多学生用归纳递推的方法得出 $(a+b)^n$ 展开式各项系数有困难.在教学中,为了便于学生理解,还可以指导学生换个角度看问题:结合多项式乘法的过程,利用组合知识得出 $(a+b)^n$ 展开式的各项系数.学生在教师指导下,围绕 $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ 的计算,从运用基础的"多项式乘法法则"计算转换到应用"组合知识"计算,充分开展从特殊到一般、从多种角度进行抽象的数学活动,抽象出一般规律,并用数学语言予以表征,实现"将已知数学命题推广到更一般的情形",促进数学抽象素养的形成和发展.同时获得多种数学抽象的活动经验.

多种归纳概括方式的运用,教师的指导非常重要.追问是实现教师指导的有效方法,如"还有别的想法吗?""你能用同学的(不一样)思路重新思考一下吗?""你能再从这个视角思考一下吗?""换个视角再审视,你发现了什么?能从这个角度试着推广一下吗?"这些追问,再辅以具体例证的启发,能够有效地帮助学生灵活运用多种归纳概括方式,得出数学知识.

## 3 掌握数学抽象的方法

概念形成是一种教师指导下的基本数学抽象方法.导数作为一种基本概念,其教学采用的是概念形成的方式.函数领域内的很多知识,像函数的概念、函数单调性的概念等,都是采用概念形成的方式抽象得到的.它用到较多的实际背景.学生经历多次的概念形成学习活动,教师有意指导学生比较、反思这些知识的学习过程,学生能够逐渐内化这种学习方法,学会一种有指导的数学抽象方法.

延续生长点知识原有的抽象思路,是数学抽象的另一种基本方法.高中数学的许多内容,是对已有数学概念的进一步推广.其数学抽象的思路,是延续生长点知识原有的抽象思路,通过对新的具体例证的探讨,扩展得到新知识.这样的思路,具有主动性,是高中阶段数学抽象的另一种基本方法.例如,怎样发展分数指数幂的概念?审视已有相关知识,有效激活思路.回顾零指数幂的推导方法,发现是通过对同底数幂的除法运算法则使用范围的扩展得到的(同底数幂的除法运算法则明显与乘法运算法则不对称,除法运算法则多了被除数指数大于除数指数的限制.解除这个限制,通过考察一些个例,会发展出零指数幂与负整数指数幂).套用这个思路,考察幂的乘方法则,探讨一些例证,自然可推出分数指数幂.学生多次成功应用同一方法,在应用过程中,在事后的反思审视过程中,逐渐强化了这个思路,就逐渐学会了蕴藏在内的数学抽象方法.

又如,探究椭圆的定义.教师可以指引学生利用圆的定义——到定点的距离等于定长的点的轨迹——探讨推广的方向,从而培养学生的数学抽象基本方法.圆的定义中有两个要素,一是定点,二是定长.沿着定点的方向推广,圆是一个定点,那么自然提出,到两个定点的距离和等于定长的点的轨迹是什么呢?这样自然导出椭圆的定义与画法.并且为接下来的后续知识——双曲线和抛物线——的再创造,奠定了方向与方法.在一个时间段密集运用同一思路,有利于形成数学抽象的习惯.延续知识生长点思路的关键,是确认正确的知识生长点.这需要教师具有整体视野与主题教学的意识与能力.

转化视角再审视已有知识,发现推广的新方法,得到新的数学知识,也是高中段重要的数学抽象方法之一.如上述二项式定理的教学,学生习惯

从多项式乘法归纳$(a+b)^2$，$(a+b)^3$，$(a+b)^4$ 展开式的共同特征，得到$(a+b)^n$ 展开式的猜想. 但用递推方法得出展开式的各项系数有困难. 指导学生换个角度看问题，利用组合知识就很容易得出展开式的各项系数. 再如函数的概念. 初中基于变化过程，得到函数的“变量说”概念. 高中转化视角，基于变化结果，得到了函数的“对应说”概念.

用简单的符号代替复杂的表达形式，得到一些数学的命题，也是一种数学抽象的方法. 数学的符号语言，是描述、记载与传递数学知识的工具. 具有概括结论、压缩信息、实现运算自动化、提供反省对象的功能. 作为语言，它与日常语言一样，也有多词一意(同义词)现象. 这种现象，为压缩信息抽象出新知识提供了一种重要方法. 用简洁的符号代替复杂的表达形式，往往会抽象出新的数学知识. 例如，等比数列前 $n$ 项和公式的推导. 早在公元前 3000 年，古巴比伦人就已经能用 $S_{n-1}$ 来代替，从而利用递推关系 $S_n=a_1+qS_{n-1}$ 计算一些具体的等比数列求和问题. 这种方法，是一种典型的符号抽象. 另外，《几何原本》中给出的推导方法，与古巴比伦的莱因德纸草所示的计算方法本质相同，都是一种符号抽象. 利用这些数学史料，针对等比数列的特点，充分利用等比数列的定义，指导学生经历用数学语言不断简化知识表达的过程，能够合乎逻辑地得出等比数列前 $n$ 项和公式：

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n\\&=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1}\\&=a_1+q(a_1+a_1q+\cdots a_1q^{n-2})\\&=a_1+q\cdot S_{n-1},\end{aligned}$$

这种递推关系蕴含的算法是利用计算机编程计算等比数列前 $n$ 项和的基础.

## 4　认识数学结构与体系

数学结构表达了某类数学知识的共同规律. 数学体系，表达了数学知识的家族谱系特征，蕴含了逻辑上的知识发展的来龙去脉. 认识数学结构与体系，有利于整体把握数学，帮助学生以大观念为核心重构知识结构，预见知识的发展，提高解题能力. 帮助学生认识数学结构与体系的关键，是建立知识间的本质联系. 例如导数概念，从逻辑上看，就是函数单调性概念的压缩与再抽象. 单调性概念描述的是两个不等式的关系：对任意的 $x_1<x_2$，有 $y_1<y_2$. 导数概念是对这两个不等式的压缩，把这两个不等式压缩为一个分式，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$即为函数图像上连接两点$(x_1,f(x_1))$和$(x_2,f(x_2))$的割线的斜率. 所谓直线的斜率，也就是因变量相对于自变量变化的快慢程度，即$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，它反映和刻画了直线的倾斜程度. 当自变量增加即 $\Delta x>0$ 时；若因变量也随之增加，即 $\Delta y>0$，此时割线斜率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$，函数单调递增；否则，因变量随之减少，即 $\Delta y<0$，此时割线斜率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$，函数单调递减. 比值$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$也是该函数在单调区间的任一子区间上的平均变化率，通过对平均变化率取极限，割线斜率就转化成了函数在点$(x_1,f(x_1))$处的切线斜率，此即函数在 $x=x_1$ 处的瞬时变化率，亦即导数 $f'(x_1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. 根据极限的保号性定理，当$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$ 时，导数非负，这时函数单调递增；当$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$ 时，导数非正，这时函数单调递减. 这样，在单调性、斜率和导数等三个不同概念之间建立起内在联系，有助于学生理解用导数判断单调性的道理，消除逻辑连贯前后一致的知识结构.

认识数学命题的结构，有助于进一步抽象出更一般的数学命题，整体把握系列命题的关系与本质，构建更为简洁的解题思路. 例如，在解决问题中，有时面对较为特殊的问题，通过特殊到一般的抽象，转变为一般问题，会为原问题的分析提供新的视角. 便于把握问题的本质，以简驭繁，形成更简便的解决方法. 如为了计算 $\sum n^3$，一个有效的办法是将这一问题看做求 $\sum n$，$\sum n^2$，$\sum n^3$，… 系列问题中的一个. 这样的一般化是着眼从单一的求解 $\sum n^3$ 转移到考虑 $\sum n$，$\sum n^2$，$\sum n^3$，…之间的关系. 进而依据二项式公式：$(n+1)^{k+1}=n^{k+1}+C_{k+1}^1n^k+C_{k+1}^2n^{k-1}+\cdots+1$，不仅可以由 $\sum n$ 和 $\sum n^2$ 去求得 $\sum n^3$，还可以通过递归，求得一般的 $\sum n^k$.[4]

再如，有时面对较为复杂的问题，通过抽象，

简化问题，把握问题实质，也会为原问题的解决找到思路. 如题目：当 $a$ 取何值时，方程 $x^4+3x^3+ax^2+3x+1=0$ 没有实数根？考虑简化问题：当 $a$ 取何值时，方程 $x^2+ax+1=0$ 没有实数根？就可以找到解决原问题的基本思路：通过换元转化为二次方程，运用判别式建立不等式求解. 以简驭繁的解题过程，有助于学生把握问题的本质，运用数学抽象的思维方式思考并解决问题. 学生在这种以简驭繁解题过程中的成功体验，会增强自信心，进一步激发数学抽象的好奇心，体会数学的特点，积累从具体到抽象的活动经验，养成一般化思考问题的习惯.

构建命题系统，认识数学体系，是一种更高水平的数学抽象. 通过这种抽象可以让人们看清楚数学知识的整体面貌及其发生和发展过程、数学理论体系的完善过程以及不同数学研究领域的相互联系和统一性.

在高中阶段，对数学体系的认识表现在以下几个方面：其一是在高观点下对已学知识的系统梳理，如利用函数的思想重新梳理初中阶段的各种方程、不等式，看清它们之间的关系(联系)；其二是建立表面上不同系统的深刻联系，如向量与坐标、曲线与方程等的联系，体会数学的统一性；其三是通过对结构体系的深刻认识，形成统一的研究框架，基于对结构体系的完善，提出新的数学对象与命题. 如复数的引入.

复数的引入具有数学的发现和创造过程的典型性. 数学历史表明，复数的引入首先是为了解二次方程. 16世纪，意大利数学家卡尔丹在解三次方程时使用了复数. 那时，数学家们对复数的意义充满疑惑，并一直要搞清楚复数的意义. 直到19世纪初，高斯给出了复数 $a+bi$($a$、$b$ 为实数)的几何意义，复数才有了合法地位. 循着复数发展的历史，学生思考下列问题，能深刻地认识数学体系结构，体会数学的统一性.

**问题1**　在数系的扩充中，引进一种新的数，就要定义它的运算；定义一种运算，就要研究它的运算律. 对于引进的“虚数单位”i，它服从 $i^2=-1$，根据已有的数系扩充理论，要使符号 i 能像实数那样进行加、乘运算，它应该有怎样的一般形式？

**问题2**　在复数范围内，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的解的情况如何？

**问题3**　类比用数轴上的点表示实数，如何对复数作出几何解释(复数的几何表示)？从复数的几何表示出发，联系三角函数、向量等，你能发现和提出哪些问题？得出哪些有用的结论？(复数的模，共轭复数及其性质，复数加法的平行四边形法则，复数的“三角形不等式”，复数的三角表示等)

**问题4**　借助于复数的三角表示，联系向量的有关知识，你能提出哪些问题？得出哪些结论？(向量的旋转、伸缩与复数乘法、棣莫弗公式等)

**问题5**　借助单位圆，联系三角函数的定义和性质，用棣莫弗公式研究单位根.(在复数范围内，1恰有 $n$ 个不同的 $n$ 次方根，它们可以用单位圆的一个内接正 $n$ 边形的顶点来表示，$z=1$ 是其中一个)

**问题6**　从复数、三角函数、向量之间的联系性出发，你能发现和得出哪些新问题？

上述问题通过类比“自然数——有理数——实数”的扩充过程，每次扩充都是来源于数学概念体系的发展过程和解决实际问题的需要(社会需要、运算需要、求解方程需要)，从中抽象出数系扩充的主要研究问题：一是引入一个新的数，就要定义其运算；二是定义一种运算，就要研究其运算律. 从而进一步抽象出数系扩充的基本原则：使算术的运算保持不变. 最后归纳出复数的代数形式，以及把复数与向量、三角相联系从而提出更深层次的问题，体现了数学的统一性——概念、思想方法结构体系的统一.

数学抽象素养的形成和发展不是一蹴而就的，需要长期潜移默化的熏陶. 上述培养策略，具有可操作性. 能够帮助学生经历数学抽象的核心过程，感受数学抽象的成功体验，增强数学抽象的自信心，进一步激发数学抽象的好奇心，体会数学的特点，发展数学抽象能力，积累数学抽象活动经验，形成数学抽象素养.

**参考文献**

[1]中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京：人民教育出版社，2018：4－5，79
[2]章建跃. 数学教育随想录[M]. 杭州：浙江教育出版社，2017：519－520，786－787
[3]程华. 从数学核心素养培育看教师专业能力提升[J]. 数学通报，2019，58(5)：14－17
[4]郑毓信，肖柏荣，熊萍. 数学思维与数学方法论[M]. 成都：四川教育出版社，2001：58－59