高三数学周练 9　附加题 11.09

1.已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & b\\ a & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$.

（1）求 a，b 的值；（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

（1）$\begin{cases}b=1\\ a=4\end{cases}$；（2）$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

2．在二项式 $(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式中，前三项系数的绝对值成等差数列

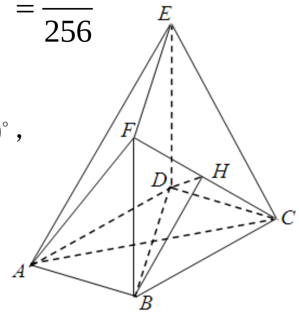
（1）求展开式的常数项；

（2）求展开式中各项的系数和。

解：展开式的通项为 $T_{r+1}=(-\dfrac{1}{2})^r C_n^r x^{\frac{n-2r}{3}}$，r=0，1，2，…，n

由已知：$(-\dfrac{1}{2})^0 C_n^0$，$(\dfrac{1}{2})C_n^1$，$(\dfrac{1}{2})^2 C_n^2$ 成等差数列，∴ $2\times\dfrac{1}{2}C_n^1=1+\dfrac{1}{4}C_n^2$ ∴ $n=8$

（1）令 $8-2r=0\therefore r=4\therefore T_5=\dfrac{35}{8}$　（2）令 x=1，各项系数和为 $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{1}{256}$



3．如图，在多面体 ABCDEF 中，底面 ABCD 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60^\circ$，四边形 BDEF 是矩形，平面 BDEF⊥平面 ABCD，BF=3，H 是 CF 的中点.

（1）求直线 DH 与平面 $BDEF$ 所成角的正弦值；

（2）求二面角 $H-BD-C$ 的大小.

解：(1) 平面BDEF⊥平面ABCD

平面BDEF∩平面ABCD = BD

矩形BDEF ⇒ ED⊥BD

ED ⊂ 平面BDEF

⇒ ED⊥平面ABCD

取BC中点M，连结DM

菱形ABCD，∠BAD=60° ⇒ DM⊥AD

分别以 DA、DM、DE 为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系 O−xyz

D(0,0,0)，B(1,√3,0)，F(1,√3,3)

C(−1,√3,0)，H(0,√3,3/2)

$\overrightarrow{DH}=(0,\sqrt{3},\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{DB}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,0,3)$

设平面BDEF的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=x+\sqrt{3}y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DE}=3z=0\end{cases}$　∴ $\vec{m}=(\sqrt{3},-1,0)$

∴ $\cos\langle\overrightarrow{DH},\vec{m}\rangle=\dfrac{0\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}(-1)+\frac{3}{2}\times 0}{\sqrt{3+\frac{9}{4}}\cdot\sqrt{3+1}}=-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

∴ DH 与平面BDEF所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

(2) 设平面HBD的法向量 $\vec{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$

平面BDC的法向量 $\vec{n_2}=(0,0,1)$

$\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{DB}=x_1+\sqrt{3}y_1=0$　∴ $\vec{n_1}=(3,-\sqrt{3},2)$

$\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{DH}=\sqrt{3}y_1+\frac{3}{2}z_1=0$

∴ $\cos\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\dfrac{2}{\sqrt{9+3+4}\cdot 1}=\dfrac{1}{2}$

∵ 二面角H−BD−C是锐角

∴ 二面角H−BD−C的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$

4.如图是一旅游景区供游客行走的路线图，假设从进口A开始到出口B，每遇到一个岔路口，每位游客选择其中一条道路行进是等可能的.现有甲、乙、丙、丁共4名游客结伴到旅游景区游玩，他们从进口A的岔路口就开始选择道路自行游玩，并按箭头所指路线行走，最后到出口B集中，设点C是其中的一个交叉路口点.

（1）求甲经过点C的概率；

（2）设这4名游客中恰有X名游客都是经过点C，求随机变量X的概率分布和数学期望.

解：（1）设"甲从进口A开始到出口B经过点C"为事件M，

甲选中间的路的概率为$\frac{1}{3}$，在前面从岔路到达点C的概率为$\frac{1}{2}$，这两步事件相互独立，

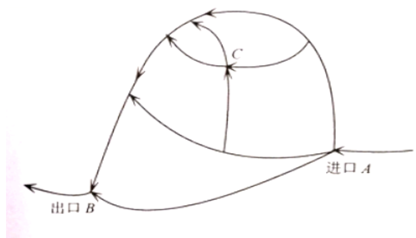
所以选择从中间一条路走到C的概率为$P_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

同理，选择从最右边的道路走到点C的概率为$P_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

因为选择中间道路和最右边道路行走的两个事件彼此互斥，

所以$P(M)=P_1+P_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

答：甲从进口A开始到出口B经过点C的概率$\frac{1}{3}$.



（2）随机变量X可能的取值为0，1，2，3，4，

则$P(X=0)=C_4^0\times\left(\frac{1}{3}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$，

$P(X=1)=C_4^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$，

$P(X=2)=C_4^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$，$P(X=3)=C_4^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$，

$P(X=4)=C_4^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}$，

数学期望$E(X)=0\times\frac{16}{81}+1\times\frac{32}{81}+2\times\frac{24}{81}+3\times\frac{8}{81}+4\times\frac{1}{81}=\frac{4}{3}$.

高三数学周练 9　附加题答案

1.（1）$\begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases}$；（2）$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2．展开式的通项为$T_{r+1}=(-\frac{1}{2})^r C_n^r x^{\frac{n-2r}{3}}$，r=0，1，2，…，n

由已知：$(-\frac{1}{2})^0 C_n^0, (\frac{1}{2})C_n^1, (\frac{1}{2})^2 C_n^2$成等差数列，∴ $2\times\frac{1}{2}C_n^1=1+\frac{1}{4}C_n^2$ ∴ $n=8$

（1）令$8-2r=0 \therefore r=4 \therefore T_5=\frac{35}{8}$　（2）令 x=1，各项系数和为$\left(1-\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$

3．（Ⅰ）$\frac{\sqrt{7}}{7}$；（Ⅲ）60°.

4.（1）设"甲从进口A开始到出口B经过点C"为事件M，

甲选中间的路的概率为$\frac{1}{3}$，在前面从岔路到达点C的概率为$\frac{1}{2}$，这两步事件相互独立，

所以选择从中间一条路走到C的概率为$P_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

同理，选择从最右边的道路走到点C的概率为$P_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

因为选择中间道路和最右边道路行走的两个事件彼此互斥，

所以$P\left(M\right)=P_1+P_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

答：甲从进口A开始到出口B经过点C的概率$\frac{1}{3}$.

（2）随机变量X可能的取值为0，1，2，3，4，

则$P\left(X=0\right)=\mathrm{C}_4^0\times\left(\frac{1}{3}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$，$P\left(X=1\right)=\mathrm{C}_4^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$，

$P\left(X=2\right)=\mathrm{C}_4^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$，$P\left(X=3\right)=\mathrm{C}_4^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$，

$P\left(X=4\right)=\mathrm{C}_4^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}$，

数学期望$E\left(X\right)=0\times\frac{16}{81}+1\times\frac{32}{81}+2\times\frac{24}{81}+3\times\frac{8}{81}+4\times\frac{1}{81}=\frac{4}{3}$.