2020－2021学年度迎八省联考考前热身卷

数学试题

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

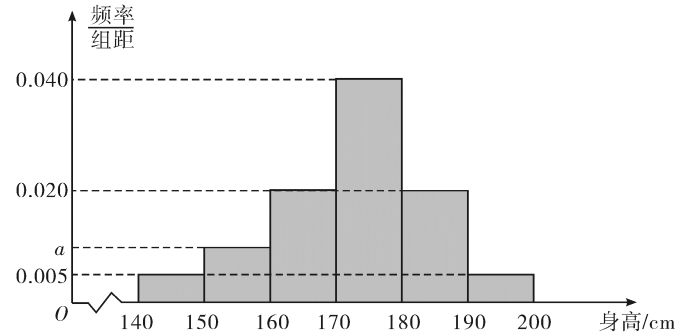
1．已知集合 $A=\{x|2-x\geqslant 0\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}|y=\ln(x+1)\}$，则 $A\cap B=$

A．$[-1,2]$　B．$(-1,2]$　C．$\{0,1,2\}$　D．$\{-1,0,1,2\}$

2．设复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=|z+\mathrm{i}|$，i为虚数单位，且 z 在复平面内对应的点为 $Z(x,y)$，则下列结论一定正确的是

A．$x=1$　B．$y=1$　C．$x=0$　D．$y=0$

3．从某市的中学生中随机调查了部分男生，获得了他们的身高数据，整理得到如下频率分布直方图：



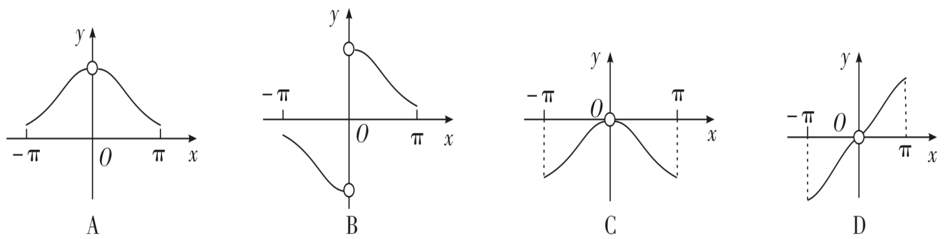
根据频率分布直方图，可知这部分男生的身高的中位数的估计值为

A．171.25cm　B．172.75cm　C．173.75cm　D．175cm

4．已知向量 $\vec{a}=(-1,t)$，$\vec{b}=(2,y)$，其中 $y=t^2-2+\dfrac{1}{t^2+1}$，则当 y 最小时，$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=$

A．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　B．$-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　C．$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

5．函数 $f(x)=\dfrac{5x+2\sin x}{3^x-3^{-x}}(x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi])$ 的大致图象为



6．已知 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=(-1)^{[\frac{n-1}{2}]}n^2$，则数列 $\{a_n\}$ 的前60项的和为

A．1830　B．-1830　C．3660　D．-3660

7．长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AB=a$，$AD=b$，$AA'=a+b$，则三个角 $\angle AA'B$，$\angle BA'D$，$\angle DA'A$ 的和为

A．30°　B．45°　C．60°　D．90°

8．已知过点 $M(4,0)$ 的直线与抛物线 C：$y^2=4x$ 交于点 A,B，设 O 为坐标原点，则 $\dfrac{|OA|+|OB|}{|AB|}$ 的最大值为

A．1　B．2　C．$\sqrt{2}$　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共计20分．每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题意．全部选对的得5分，部分选对的得3分，有选错的得0分．

9．已知 a,b,c 是实数，则下列结论正确的是

A．"$a^2>b^2$"是"$a>b$"的充分条件

B．"$a^2>b^2$"是"$a>b$"的必要条件

C．"$ac^2>bc^2$"是"$a>b$"的充分条件

D．"$|a|>|b|$"是"$a>b$"的既不充分也不必要条件

10．若函数 $f(x)=\ln|x|-\dfrac{1}{x^2+1}$，则下列说法正确的是

A．函数 $f(x)$ 是偶函数

B．函数 $f(x)$ 在定义域上是单调增函数

C．函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

D．不等式 $f(x-1)>f(2x)$ 的解集为 $(-1,0)\cup(0,\dfrac{1}{3})$

11．将函数 $f(x)=\sqrt{6}\sin x\cos x+\sqrt{2}\cos^2x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象．则下列说法正确的是

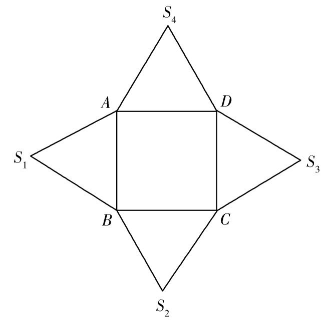
A．函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(\dfrac{\pi}{3},0)$ 成中心对称

B．函数 $g(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上有8个极值点

C．函数 $g(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4}]$ 上的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D．函数 $g(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{12})$ 上单调递增

12．在如图所示的平面多边形中，四边形 $ABCD$ 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，外侧4个三角形均为正三角形．若沿正方形的4条边将三角形折起，使顶点 S_1,S_2,S_3,S_4 重合为 S 点，得到四棱锥 $S-ABCD$，则



A．此四棱锥的外接球的直径为 $\sqrt{3}$　B．此四棱锥的外接球的表面积为 3π

C．此四棱锥的外接球的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi$　D．此四棱锥的高为1

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．$(x+2y)^3(x-y)^5$ 的展开式中 x^3y^5 的系数为________．

14．已知双曲线 E：$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，M 在 E 的右支上，若 $\angle F_1MF_2\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}]$，则 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}$ 的最大值为________．

15．若存在直线 l 与函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}(x<0)$ 及 $g(x)=x^2+a$ 的图象都相切，则实数 a 的最小值为________．

16．某中学某天有6节课，其中上午4节，下午2节，若要排语文、数学、英语、信息技术、体育、地理这6节课，要求上午第一节课不排体育，数学必须排在上午，则不同的排法种数是______，数学排第一节课的概率是______．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分10分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant 2)$，且 $a_1\neq a_2$，$a_3=\dfrac{1}{5}$，a_1,a_2,a_5 成等比数列．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

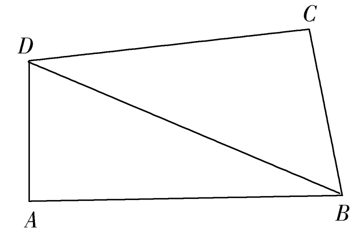
(2) 记数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和为 S_n，$b_n=a_na_{n+1}S_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

18．（本小题满分12分）

已知四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$\angle BDC=\dfrac{\pi}{6}$，$AD=2$，$DC=4$．

(1) 若 $\cos\angle ABD=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，求 BD，BC；

(2) 若 $\angle C=\angle ADC$，求 $\sin\angle CBD$．

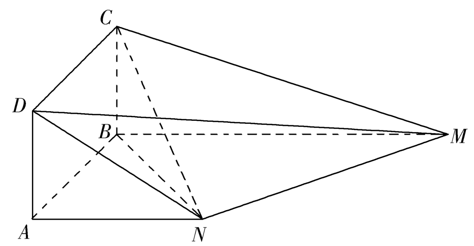


19．（本小题满分12分）

如图所示，正方形 $ABCD$ 所在平面与梯形 $ABMN$ 所在平面垂直，MB // AN，$NA=AB=2$，$BM=4$，$CN=2\sqrt{3}$．

(1) 证明：平面 $DMN\perp$ 平面 BCN；

(2) 求二面角 $C-MN-D$ 的余弦值．



20.（本小题满分 12 分）

为增强学生的法治观念，营造“学宪法、知宪法、守宪法”的良好校园氛围，某学校开展了“宪法小卫士”活动，并组织全校学生进行法律知识竞赛．现从全校学生中随机抽取 100 名学生，统计了他们的竞赛成绩，已知这 100 名学生的竞赛成绩均在 [50,100] 内，并得到频数分布表（如下）．

分数段	[50，60)	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100]
人数	10	30	30	24	6

(1) 将竞赛成绩在 [70,100] 内定义为“合格”，竞赛成绩在 [50,70) 内定义为“不合格”．请将下面的 2×2 列联表补充完整，并判断是否有 99% 的把握认为“法律知识竞赛成绩是否合格”与“是否是高一新生”有关？

	合格	不合格	合计
高一新生	24		
非高一新生		12	
合计			

(2) 根据 (1) 的数据分析，将频率视为概率，从该校学生中用随机抽样的方法抽取 3 人，记被抽取的 3 人中“不合格”的人数为 X，若每次抽取的结果是相互独立的，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$．

附参考公式及临界值表：

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$．

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，过椭圆 C 的左、右焦点 F_1,F_2 分别作倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的直线 l_1,l_2，且 l_1,l_2 之间的距离为 $\sqrt{3}$．

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 若直线 l 与椭圆 C 只有一个公共点，求点 F_1,F_2 到直线 l 的距离之积．

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\cos(x-1)+x(1-\ln x)$．

(1) 设 $g(x)=f'(x)$，求证：$g(x)<\dfrac{1}{x}$；

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性．