江苏省仪征中学 2020 届高三（上）期中考试热身练习 7

班级________ 姓名________ 学号________ 评价________

一、填空题：

1．已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$， $B=\{1,m\}$,$A\cup B=A$，则 m=_______.

2．若$(a+b\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})=25$ (a，$b\in\mathrm{R}$，i 为虚数单位)，则 $a+b$ 的值为_______.

3．“$2^x<4$”是“$\frac{1}{x}>\frac{1}{2}$”成立的____________条件．（从“充要”，“充分不必要”，“必要不充分”中选择一个正确的填写）

4．在直角坐标系 xoy 中，过双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线，分别交该双曲线的两条渐近线于 A,B 两点，则线段 AB 的长为_______.

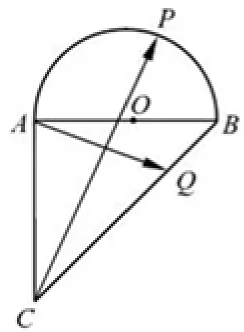
5．若 $log_a 2<2$，则实数 a 的取值范围是_______.

6．已知函数 $f\left(x\right)=x+\ln x-4$ 的零点在区间 $\left(k,k+1\right)$ 内，则正整数 k 的值为________.

7．已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^x}$，其中 e 为自然对数的底数，则不等式 $f\left(x-2\right)+f\left(x^2-4\right)<0$ 的解集为_______.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中,圆 C 的方程为$x^2+(y-3)^2=1$,若在直线$y=kx$上任取一点,使得以该点为圆心,1 为半径的圆与圆 C 都不存在公共点,则 k 的取值范围是______ .

9．在△ABC 中，若 9cos2A﹣4cos2B=5，则 $\frac{BC}{AC}$ 的值为_______.



10. 如图,在等腰直角三角形 ABC 中,$\angle CAB=90^\circ$,$AB=2$,以 AB 为直径在△ ABC外作半圆 O,P 为半圆弧 AB 上的动点,点 Q 在斜边 BC 上,若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=\frac{8}{3}$,则$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CP}$的最小值为______ .

11．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax & (x\geqslant 1)\\ 2ax-1 & (x<1)\end{cases}$，若存在两个不相等的实数 x_1,x_2，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，则 a 的取值范围为_____________.

12．已知 a， b 均为正数，且 $ab-a-2b=0$，则 $\frac{a^2}{4}-\frac{2}{a}+b^2-\frac{1}{b}$ 的最小值为________.

二、解答题：

1. 在△ABC中，已知$(\sin A+\sin B+\sin C)\cdot(\sin B+\sin C-\sin A)=3\sin B\sin C$.

(1)求角 A 的值；

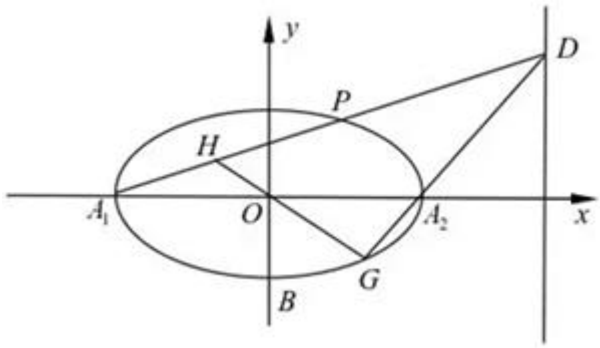
(2)求$\sqrt{3}\sin B-\cos C$的最大值.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中,已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为$A_1(-2,0)$,$A_2(2,0)$,右准线方程为$x=4$.过点$A_1$的直线交椭圆 C 于 x 轴上方的点 P,交椭圆 C 的右准线于点D.直线A_2D与椭圆 C 的另一交点为 G,直线 OG 与直线A_1D交于点 H .

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若$HG\perp A_1D$,试求直线A_1D的方程；

(3)如果$\overrightarrow{A_1H}=\lambda\overrightarrow{A_1P}$,试求$\lambda$的取值范围 .



3
校园内有一块三角形绿地AEF(如图1),其中$AE=20m$,$AF=10m$,$\angle EAF=\frac{2\pi}{3}$,绿地内种植有一呈扇形 AMN 的花卉景观,扇形 AMN 的两边分别落在 AE 和 AF 上,圆弧 MN 与 EF 相切于点 P .

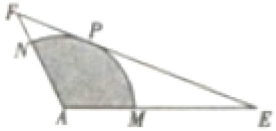


图 1

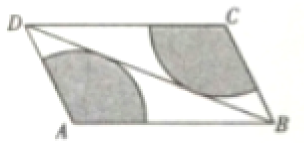


图 2

(1)求扇形花卉景观的面积；

(2)学校计划 2017 年年整治校园环境,为美观起见,设计在原有绿地基础上扩建成平行四边形 $ABCD$(如图2),其中$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$,并种植两块面积相同的扇形花卉景观,两扇形的边都分别落在平行四边形 $ABCD$ 的边上,圆弧都与 BD 相切,若扇形的半径为 $8m$,求平行四边形 $ABCD$ 绿地占地面积的最小值 .

三、附加题：

1、设 $f\left(x,n\right)=\left(1+x\right)^n$, $n\in N^*$.

（1）求 $f\left(x,6\right)$ 的展开式中系数最大的项;

（2） $n\in N^*$ ，化简 $C_n^0 4^{n-1}+C_n^1 4^{n-2}+C_n^2 4^{n-3}+\cdots+C_n^{n-1}4^0+C_n^n 4^{-1}$;

（3）求证： $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots nC_n^n=n\times 2^{n-1}$.

2、在姚明的婚礼上，为了活跃气氛，主持人邀请10位客人做一个游戏．第一轮游戏中，主持人将标有数字1，2，…，10的十张相同的卡片放入一个不透明箱子中，让客人依次去摸，摸到数字6，7，…，10的客人留下，其余的淘汰，第二轮放入1，2，…，5五张卡片，让留下的客人依次去摸，摸到数字3，4，5的客人留下，第三轮放入1，2，3三张卡片，让留下的客人依次去摸，摸到数字2，3的客人留下，同样第四轮淘汰一位，最后留下的客人获得小明准备的礼物．已知客人甲参加了该游戏．

(1)求甲拿到礼物的概率；

(2)设 ξ 表示甲参加游戏的轮数，求 ξ 的概率分布和数学期望$E(\xi)$．

3. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l 过点 $M(4,0)$.

(1)若点 F 到直线 l 的距离为$\sqrt{3}$，求直线 l 的斜率；

(2)设 A,B 为抛物线上两点，且 AB 不与 x 轴垂直，若线段 AB 的垂直平分线恰过点 M，求证：线段 AB 中点的横坐标为定值.

答案：

一、填空题：

1．已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$， $B=\{1,m\},A\cup B=A$，则 m=___▲___．3 或 0

2．若$(a+bi)(3-4i)=25$ (a，$b\in R$，i 为虚数单位)，则 $a+b$ 的值为___▲___．7

3．“$2^x<4$”是“$\frac{1}{x}>\frac{1}{2}$”成立的___▲___条件．（从“充要”，“充分不必要”，“必要不充分”中选择一个正确的填写）必要不充分

4．在直角坐标系 xoy 中，过双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线，分别交该双曲线的两条渐近线于 A,B 两点，则线段 AB 的长为___▲___．4

5．若 $log_a 2<2$，则实数 a 的取值范围是___▲___．$(0,1)\cup(\sqrt{2},+\infty)$

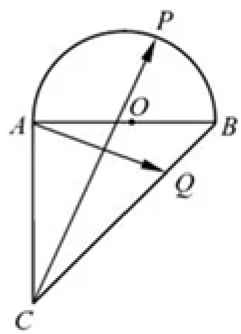
6．已知函数 $f(x)=x+\ln x-4$ 的零点在区间 $(k,k+1)$ 内，则正整数 k 的值为___▲___．2

7．已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{e^x}$，其中 e 为自然对数的底数，则不等式 $f(x-2)+f(x^2-4)<0$ 的解集为___▲___．$(-3,2)$

8. 在平面直角坐标系 xOy 中,圆 C 的方程为$x^2+(y-3)^2=1$,若在直线$y=kx$上任取一点,使得以该点为圆心,1 为半径的圆与圆 C 都不存在公共点,则 k 的取值范围是__$(-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$

9．在△ABC 中，若 9cos2A－4cos2B=5，则 $\frac{BC}{AC}$ 的值为___▲___．$\frac{2}{3}$

10. 如图,在等腰直角三角形 ABC 中,$\angle CAB=90^\circ$,$AB=2$,以 AB 为直径在△ABC外作半圆 O,P 为半圆弧 AB 上的动点,点 Q 在斜边 BC 上,若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=\frac{8}{3}$,则$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CP}$的最小值为______$-\frac{2\sqrt{5}}{3}$



11．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax & (x\geqslant 1)\\ 2ax-1 & (x<1)\end{cases}$，若存在两个不相等的实数 x_1,x_2，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，则 a 的取值范围为___▲___$a\geq 0$

12．已知 a， b 均为正数，且 $ab-a-2b=0$，则 $\frac{a^2}{4}-\frac{2}{a}+b^2-\frac{1}{b}$ 的最小值为__▲__．7

二、解答题：

1. 在△ABC中，已知$(\sin A+\sin B+\sin C)\cdot(\sin B+\sin C-\sin A)=3\sin B\sin C$.

(1)求角 A 的值；

(2)求$\sqrt{3}\sin B-\cos C$的最大值.

解 (1)∵$(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin B+\sin C-\sin A)=3\sin B\sin C$，

∴由正弦定理得$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，∴$b^2+c^2-a^2=bc$，∴$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.

∵$A\in(0，\pi)$，∴$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由 $A=\frac{\pi}{3}$得 $B+C=\frac{2\pi}{3}$,

∴$\sqrt{3}\sin B-\cos C=\sqrt{3}\sin B-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\sqrt{3}\sin B-\left(-\frac{1}{2}\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)=\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$.

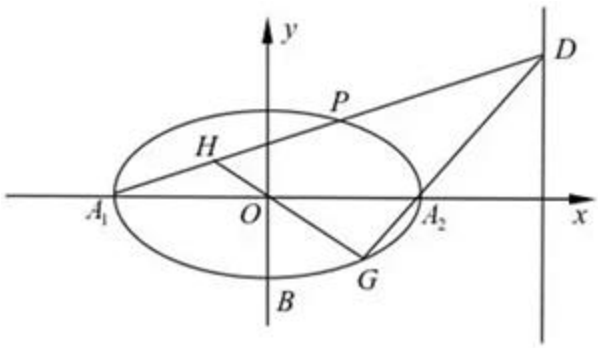
∵$0<B<\frac{2\pi}{3}$，∴$\frac{\pi}{6}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$,

∴当 $B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $B=\frac{\pi}{3}$时，$\sqrt{3}\sin B-\cos C$ 的最大值为 1.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中,已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为$A_1(-2,0)$,$A_2(2,0)$,右准线方程为$x=4$.过点$A_1$的直线交椭圆 C 于 x 轴上方的点 P,交椭圆 C 的右准线于点D.直线A_2D与椭圆 C 的另一交点为 G,直线 OG 与直线A_1D交于点 H .

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若$HG\perp A_1D$,试求直线A_1D的方程；



(3)如果$\overrightarrow{A_1H}=\lambda\overrightarrow{A_1P}$,试求$\lambda$的取值范围 .

解：(1)由椭圆的左、右顶点分别为$A_1(-2,0)$,$A_2(2,0)$,右准线方程为$x=4$可得$a=2$,$\frac{a^2}{c}=4$,故$c=1$,$b^2=a^2-c^2=3$,

故椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

(2)设直线A_1D：$y=k(x+2)$,①$(k>0)$,则与右准线$x=4$的交点$D(4,6k)$,

又$A_2(2,0)$,所以设直线A_2D：$y=3k(x-2)$,

则$\begin{cases}y=3k(x+2)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$,解得$G(\frac{24k^2-2}{1+2k^2},\frac{-12k}{1+12k^2})$,

则直线 OG 的斜率为$k_{OG}=\frac{-6k}{12k^2-1}$,②,

$\because OG\perp A_1D$,

$\therefore \frac{-6k}{12k^2-1}\cdot k=-1$,又$k>0$,解得$k=\frac{\sqrt{6}}{6}$,

则直线A_1D的方程为$y=\frac{\sqrt{6}}{6}(x+2)$．

(3)由(2)中②可得,设直线 OG：$y=\frac{-6k}{12k^2-1}x$,联立可得$\begin{cases}y=\frac{-6k}{12k^2-1}x\\ y=k(x+2)\end{cases}$,解得$H(\frac{-24k^2+2}{12k^2+5},\frac{12k}{12k^2+5})$,

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=k(x+2)\end{cases}$,∵解得$P(\frac{6-8k^2}{3+4k^2},\frac{12}{3+4k^2})$,

$\because \overrightarrow{A_1H}=\lambda\overrightarrow{A_1P}$,

$\therefore (x_H+2,y_H)=\lambda(x_P+2,y_P)$,

$\therefore y_H=\lambda y_P$,

$\therefore \lambda=\frac{y_H}{y_P}=f(k)=\frac{\frac{12k}{12k^2+5}}{\frac{12k}{3+4k^2}}=\frac{3+4k^2}{12k^2+5}=\frac{1}{\frac{12k^2+9-4}{3+4k^2}}=\frac{1}{3-\frac{4}{3+4k^2}}$,

$\because f(k)$在$(0,+\infty)$为减函数$\therefore \lambda\in(\frac{1}{3},\frac{3}{5})$.

3 校园内有一块三角形绿地AEF(如图1),其中$AE=20m$,$AF=10m$,$\angle EAF=\frac{2\pi}{3}$,绿地内种植有一呈扇形 AMN 的花卉景观,扇形 AMN 的两边分别落在 AE 和 AF 上,圆弧 MN 与 EF 相切点 P．

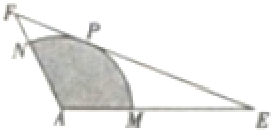


图 1

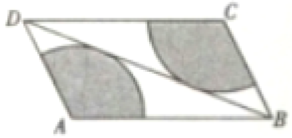


图 2

(1)求扇形花卉景观的面积；

(2)学校计划 2017 年年整治校园环境,为美观起见,设计在原有绿地基础上扩建成平行四边形 $ABCD$(如图2),其中$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$,并种植两块面积相同的扇形花卉景观,两扇形的边都分别落在平行四边形 $ABCD$ 的边上,圆弧都与 BD 相切,若扇形的半径为 8m,求平行四边形 $ABCD$ 绿地占地面积的最小值．

解：(1) $\triangle AEF$中,由余弦定理可得$EF=\sqrt{400+100-400cos\frac{2\pi}{3}}=10\sqrt{7}m.$

设扇形花卉景观的半径为 r,则由$EF\cdot r=AE\cdot AF\cdot \sin\angle EAF$,得到$r=\frac{200\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{10\sqrt{7}}=\frac{10\sqrt{21}}{7}m$,

∴扇形花卉景观的面积$S=\frac{1}{3}\pi r^2=\frac{100}{7}\pi\ m^2$；

(2)设$AB=xm,AD=ym$,则$BD=\sqrt{x^2+y^2+xy}m$,

由平行四边形 $ABCD$ 的面积得$8\sqrt{x^2+y^2+xy}=\frac{\sqrt{3}}{2}xy$,

$\because\sqrt{x^2+y^2+xy}\ge\sqrt{2xy+xy}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{xy}$,

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}xy\ge 8\sqrt{3}\cdot\sqrt{xy}$,即$xy\ge 256$,当且仅当$x=y=16$时,$xy$ 的最小值为 256,

∴平行四边形 $ABCD$ 的面积的最小值为$128\sqrt{3}m^2$.

三、附加题：

1、设 $f(x,n)=(1+x)^n, n\in N^*$.

（1）求 $f(x,6)$ 的展开式中系数最大的项；

（2）$n\in N^*$，化简 $C_n^0 4^{n-1}+C_n^1 4^{n-2}+C_n^2 4^{n-3}+\cdots+C_n^{n-1}4^0+C_n^n 4^{-1}$；

（3）求证：$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots nC_n^n=n\times 2^{n-1}$.

解：（1）展开式中系数最大的项是第四项为$C_n^3x^3=20x^3$；……………………………….3分

（2）$C_n^0 4^{n-1}+C_n^1 4^{n-2}+C_n^2 4^{n-3}+\cdots+C_n^{n-1}4^0+C_n^n 4^{-1}$

$=\frac{1}{4}\left[C_n^0 4^n+C_n^1 4^{n-1}+C_n^2 4^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}4+C_n^n\right]=\frac{1}{4}(4+1)^n=\frac{5^n}{4}$；……………………7 分

（3）因为$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$，

所以$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots C_{n-1}^{n-1}\right)=n\times 2^{n-1}$． ………10 分

2、在姚明的婚礼上, 为了活跃气氛, 主持人邀请 10 位客人做一个游戏．第一轮游戏中, 主持人将标有数字 1, 2, ⋯, 10 的十张相同的卡片放入一个不透明箱子中, 让客人依次去摸, 摸到数字 6, 7, ⋯, 10 的客人留下, 其余的淘汰, 第二轮放入 1, 2, ⋯, 5 五张卡片, 让留下的客人依次去摸, 摸到数字 3, 4, 5 的客人留下, 第三轮放入 1, 2, 3 三张卡片, 让留下的客人依次去摸, 摸到数字 2, 3 的客人留下, 同样第四轮淘汰一位, 最后留下的客人获得小明准备的礼物．已知客人甲参加了该游戏．

(1) 求甲拿到礼物的概率；

(2) 设 ξ 表示甲参加游戏的<u>轮数</u>, 求 ξ 的概率分布和数学期望E(ξ)．

解 ：（1）甲拿到礼物的事件为 A ，

在每一轮游戏中，甲留下的概率和他摸卡片的顺序无关，则$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$，

答：甲拿到礼物的概率为$\frac{1}{10}$；

（2）随机变量 ξ 的所有可能取值是 1, 2, 3, 4.

$P(\xi=1)=\frac{1}{2}$，$P(\xi=2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$，$P(\xi=3)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$，$P(\xi=4)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$，

随机变量 ξ 的概率分布列为：

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

所以$E(\xi)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{5}=2.$

3.

(I)由已知，$x=4$不合题意．

设直线l的方程为$y=k(x-4)$，

由已知，抛物线C的焦点坐标为$(1,0)$

因为点F到直线l的距离为$\sqrt{3}$，

所以$\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$

解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以直线l的斜率为$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

(II)设线段AB中点的坐标为$N(x_0,y_0)$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

因为AB不垂直于x轴，

则直线MN的斜率为$\frac{y_0}{x_0-4}$，

直线AB的斜率为$\frac{4-x_0}{y_0}$

直线AB的方程为$y-y_0=\frac{4-x_0}{y_0}(x-x_0)$

联立方程$\begin{cases} y-y_0=\frac{4-x_0}{y_0}(x-x_0) \\ y^2=4x \end{cases}$

消去x得

$(1-\frac{x_0}{4})y^2-y_0y+y_0^2+x_0(x_0-4)=0$

所以$y_1+y_2=\frac{4y_0}{4-x_0}$

因为N为AB中点，

所以$\frac{y_1+y_2}{2}=y_0$，即$\frac{2y_0}{4-x_0}=y_0$

所以$x_0=2$．

即线段AB中点的横坐标为定值2．

.