

D. 8

8. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 3^{-x}$. 若对任意的 $x \in [1, 2]$, 不等式 $f(x) \geq f^2(x-m)$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为().

- A. $[0, 1]$ B. $[1, \frac{3}{2}]$ C. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ D. $[1, 2]$

二、多项选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分)

9. 已知 α 、 β 表示不同的平面, m 、 n 表示不同的直线, 则下列命题中正确的有().

- A. 若 $m \parallel n$, $n \subset \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$ B. 若 $m \parallel \alpha$, $m \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = n$, 则 $m \parallel n$
C. 若 $m \perp \beta$, $m \subset \alpha$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $m \perp \alpha$, $n \perp \alpha$, 则 $m \parallel n$

10. 已知函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$, 则下列结论中正确的有().

- A. $f(x)$ 的图象的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, 0)$ ($k \in \mathbf{Z}$)
B. $f(x)$ 的图象可由 $y = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到
C. $f(x)$ 在 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的值域为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$
D. 方程 $f(x) = 1$ 在 $x \in [0, \pi]$ 上的根为 $x = \frac{5\pi}{12}$

11. 中国传统文化中很多内容体现了数学的“对称美”. 如图所示的太极图是由黑白两个鱼形纹组成的圆形图案, 充分体现了相互转化、对称统一的形式美、和谐美. 在平面直角坐标系中, 如果一个函数的图象能够将某个圆的周长和面积同时平分, 那么称这个函数为这个圆的“优美函数”. 则下列说法中正确的有().



- A. 对于一个半径为 1 的圆, 其“优美函数”仅有 1 个
B. 函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 可以是某个圆的“优美函数”
C. 若函数 $y = f(x)$ 是“优美函数”, 则函数 $y = f(x)$ 的图象一定是中心对称图形
D. 函数 $y = 2\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$ 可以同时是无数个圆的“优美函数”

12. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, 则下列说法中正确的有().

- A. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
B. 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $y = f(x)$ 与 $y = \tan x$ 的图象有交点
C. 函数 $g(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^4 - 5x^2 + 9}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$
D. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq e^x - 1$ 恒成立

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 若函数 $f(x) = x + \ln x$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $y=kx$ 平行，则实数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 用几种不同的乐器同时弹奏某一首乐曲时，我们有时能听到比用单一乐器弹奏时更美妙的声音，这实际上是几种声波合成后改变了单一声波的波形. 假设某美妙声波的传播曲线可用函数 $y = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) - 2 \sin 2x$ 来描述，则该声波函数的最小正周期为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. 在三棱锥 $O-ABC$ 中， $AB=2$ ， $AC=2\sqrt{3}$ ， $BC=4$ ，且侧棱长均为 $2\sqrt{5}$ ，则该三棱锥外接球的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
16. 若函数 $f(x) = ae^x - \frac{1}{2}x^2 + 3$ ($a \in \mathbf{R}$) 有两个不同的极值点 x_1 和 x_2 ，则 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；若 $x_1 < x_2 \leq 2x_1$ ，则 a 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

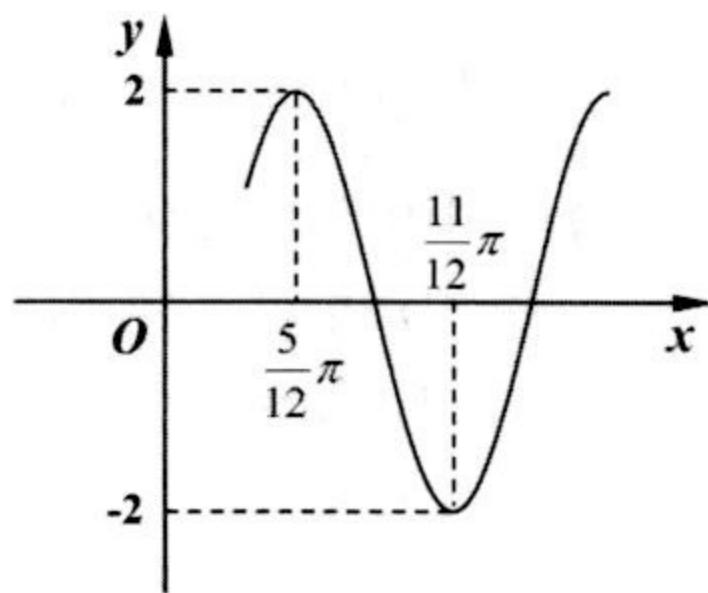
17. （本小题满分 10 分）

已知集合 $A = \{x | x^2 - x \leq 0\}$ ，记函数 $f(x) = \sqrt{1 - ax^2}$ ($a > 0$) 的定义域为集合 B .

- (1) 当 $a=1$ 时，求 $A \cup B$ ；
 (2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围.

18. （本小题满分 12 分）

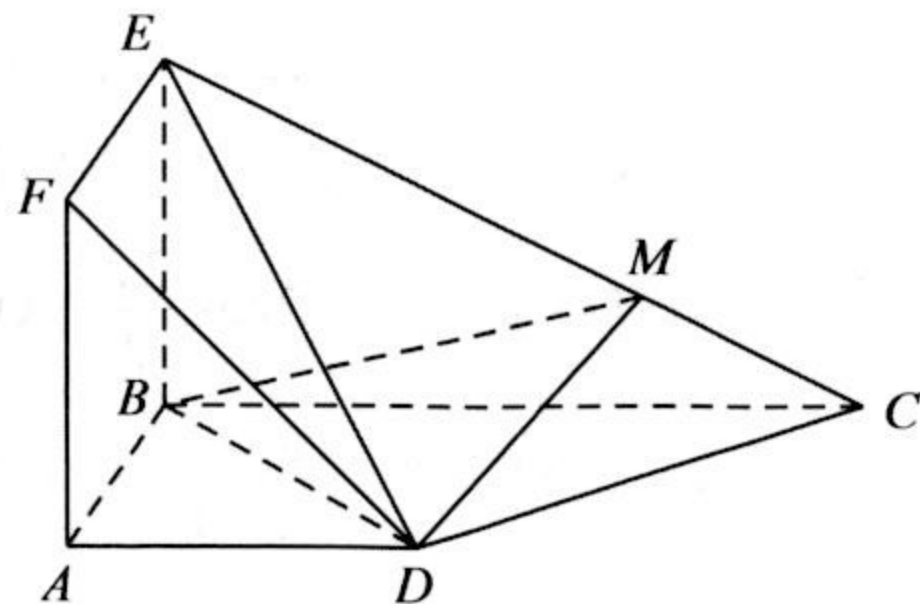
已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示.



- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式，并求出该函数的单调递增区间；
 (2) 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，且 $f(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}) = \frac{6}{5}$ ，求 $f(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6})$ 的值.

19. （本小题满分 12 分）

如图，已知梯形 $ABCD$ 与正方形 $ABEF$ 所在平面垂直，
 $AD \parallel BC$ ， $AD = AB = \frac{1}{2}BC = 1$ ， $BD = \sqrt{2}$ ，且 $\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{MC}$.



- (1) 证明： $BE \perp CD$ ；
 (2) 求二面角 $M-BD-C$ 的余弦值.

20. （本小题满分 12 分）

在① $(2b - c) \cos A = a \cos C$ ，② $(\sin A + \sin B)(a - b) = c(\sin C - \sin B)$ ，

③ $\tan A + \tan B + \tan C = \sqrt{3} \tan B \tan C$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的横线上，并加以解答.

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ，若 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- (1) 求 A ；
 (2) 若点 M 在线段 AC 上， $\angle ABM = \angle CBM$ ， $BM = \frac{5}{3}\sqrt{7}$ ，且 $\cos B = \frac{1}{7}$ ，求 c .

21. (本小题满分 12 分)

某种疾病可分为 I、II 两种类型. 为了解该疾病类型与性别是否有关, 在某地区随机抽取了男女患者各 200 名, 每位患者患 I 型或 II 型病中的一种, 得到下面的列联表:

	I 型病	II 型病
男	150	50
女	125	75

(1) 根据列联表, 判断是否有 99% 的把握认为所患疾病类型与性别有关.

(2) 某药品公司欲研发此疾病的治疗药物, 现有两种试验方案, 每种方案至多安排 2 个接种周期, 且该药物每次接种后出现抗体的概率为 $p(0 < p < 1)$, 每人每次接种的费用为 m 元(m 为大于零的常数).

方案一: 每个周期必须接种 3 次, 若在第一个周期内 3 次出现抗体, 则终止试验; 否则进入第二个接种周期.

方案二: 每个周期至多接种 3 次, 若第一个周期前两次接种后均出现抗体, 则终止本周期的接种, 进入第二个接种周期, 否则需依次接种完 3 次, 再进入第二个接种周期; 若第二个接种周期第 1 次接种后出现抗体, 且连同第一个接种周期共 3 次出现抗体, 则终止试验, 否则需依次接种完 3 次.

假设每次接种后出现抗体与否相互独立. 用随机变量 X 和 Y 分别表示按方案一和方案二进行一次试验的费用.

① 求 $E(X)$ 和 $E(Y)$;

② 从平均费用的角度考虑, 哪种方案较好?

参考公式: $\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

参考数据:

$P(\chi^2 \geq x_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax - a$, $g(x) = \frac{a \ln x - ax^2 + a - e}{x} (a \geq 0)$, 其中 e 是自然对数的底数.

(1) 当 $a = e$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 讨论 $g(x)$ 的零点个数;

(3) 若存在 $x \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x) \leq g(x)$ 成立, 求 a 的取值范围.