江苏省仪征中学2019届高三年级下学期3月份冲刺二模热身训练4

班级__________姓名__________学号__________日期__________

一、填空题：

1．设集合 $A=\{1，m\}$，$B=\{2，3\}$，若 $A\cap B=\{3\}$，则 $m=$____________.

2．已知复数 z 满足 $z\left(1+2\mathrm{i}\right)=3-\mathrm{i}$（其中 i 为虚数单位），则 $|z|$ 的值为____________.

3．将一颗质地均匀的正方体骰子（每个面上分别写有数字 1，2，3，4，5，6）先后抛掷 2 次，观察向上的点数，则点数之和是 6 的的概率是____________.

4．一支田径队有男运动员 28 人,女运动员 21 人，现按性别用分层抽样的方法,从中抽取 14 位运动员进行健康检查,则男运动员应抽取____________人.

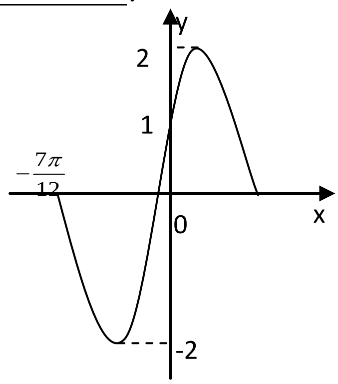
5．根据如图所示的伪代码，可知输出的结果 S 为____________.

```
I ← 1
While I < 100
  I ← I + 2
  S ← 2I + 3
End While
Print S
```

（第 5 题）

6. 命题“存在 $x\in\mathbf{R}$，使 $x^2+ax-4a<0$”为假命题，则实数 a 的取值范围是____________.

7．已知函数 $y=A\sin(\omega x+\phi),(A>0,\omega>0,|\phi|<\pi)$ 的图象如图所示，则该函数的解析式是____________.



8．若函数 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时， $f(x)=x\ln x$，则不等式 $f(x)<-e$ 的解集为____________.

9．四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是矩形， $AB=2$， $AD=3$， $PA=\sqrt{3}$，点 E 为棱 CD 上一点，则三棱锥 $E-PAB$ 的体积为____________.

10. 若函数 $f(x)=\begin{cases} x+2^x, & x\leqslant 0, \\ ax-\ln x, & x>0 \end{cases}$ 在其定义域上恰有两个零点，则正实数 a 的值为____________.

11．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数， $a_1=1$，且 $a_3,a_4+\frac{5}{2},a_{11}$ 成等比数列.

若 $p-q=10$，则 $a_p-a_q=$____________.

12．在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C： $x^2+(y-3)^2=2$，点 A 是 x 轴上的一个动点，AP，AQ 分别切圆 C 于 P，Q 两点，则线段 PQ 长的取值范围为____________.

二、解答题：

13. （本小题满分 14 分）

在ΔABC中，a、b、c分别是三内角 A、B、C 的对应的三边，已知$b^2+c^2=a^2+bc$。

（1）求角 A 的大小：

（2）若$2\sin^2\dfrac{B}{2}+2\sin^2\dfrac{C}{2}=1$，判断$\Delta ABC$的形状。

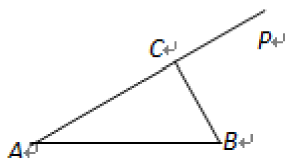
14．（本小题满分 14 分）

如图，某公园内有两条道路AB，AP，现计划在AP上选择一点C，新建道路BC，并把$\triangle ABC$所在的区域改造成绿化区域．已知$\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$，$AB=2$ km．

（1）若绿化区域$\triangle ABC$的面积为$1\,\text{km}^2$，求道路BC的长度；

（2）若绿化区域$\triangle ABC$改造成本为 10 万元/km^2，新建道路BC成本为 10 万元/km．

设$\angle ABC=\theta$（$0<\theta\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$），当$\theta$为何值时，该计划所需总费用最小？



15．（本小题满分 16 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的离心率$e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，一条准线方程为$x=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

⑴求椭圆C的方程；

⑵设G,H为椭圆C上的两个动点，O为坐标原点，且$OG\perp OH$．

①当直线OG的倾斜角为60°时，求ΔGOH的面积；

②是否存在以原点O为圆心的定圆，使得该定圆始终与直线GH相切？若存在，请求出该定圆方程；若不存在，请说明理由．

三、附加题：

16 A．选修 4－2：矩阵与变换

已知二阶矩阵 A 有特征值$\lambda_1=1$及对应的一个特征向量$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$和特征值$\lambda_2=2$及对应的一个特征向量$\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，试求矩阵 A.

16 B．（选修 4—4：坐标系与参数方程）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\alpha, \\ y=t\sin\alpha, \end{cases}$ (α为参数)．在极坐标系(与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位，且以原点 O 为极点，以 x 轴正半轴为极轴)中，直线 l 的方程为 $\rho\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}$.

(1)求直线 l 的直角坐标方程和椭圆 C 的普通方程；

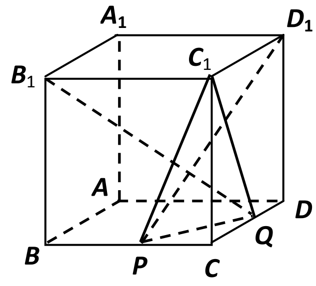
(2)若直线 l 与椭圆 C 有公共点，求 t 的取值范围.

17. （本小题满分 10 分）

如图所示, 在棱长为 2 的正方体 AC_1 中, 点 P、Q 分别在棱 BC、CD 上, 满足 $B_1Q\perp D_1P$, 且 $PQ=\sqrt{2}$.

⑴ 试确定 P 、Q 两点的位置.

⑵ 求二面角 C_1-PQ-A 大小的余弦值.



第 22 题

江苏省仪征中学2019届高三年级下学期3月份冲刺二模热身训练4答案：

一、填空题：

1． 3　　2． $\sqrt{2}$　　3． $\frac{5}{36}$　　4． 8　　5．205　　6． $-16\le a\le 0$

7． $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$　　8． $(-\infty,-\mathrm{e})$.　　9． $\sqrt{3}$　　10． $\frac{1}{\mathrm{e}}$　　11． 15　12． $[\frac{2\sqrt{14}}{3},2\sqrt{2})$

13. 解析：（1）在ΔABC中，$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，又$b^2+c^2=a^2+bc$

$\therefore \cos A=\frac{1}{2},A=\frac{\pi}{3}$ ……………………………………………………6 分

（2）$\because 2\sin^2\frac{B}{2}+2\sin^2\frac{C}{2}=1$，$\therefore 1-\cos B+1-\cos C=1$…………………………8 分

$\therefore$ $\cos B+\cos C=1,\cos B+\cos(\frac{2\pi}{3}-B)=1$，$\cos B+\cos\frac{2\pi}{3}\cos B+\sin\frac{2\pi}{3}\sin B=1$，

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B=1$，$\therefore \sin(B+\frac{\pi}{6})=1$，

$\because 0<B<\pi$，$\therefore$ $B=\frac{\pi}{3},C=\frac{\pi}{3}$，$\therefore \Delta ABC$为等边三角形。……………14 分

14. 解析：（1）因为在$\triangle ABC$中，已知$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，$AB=2\ \text{km}$，

所以由$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin\frac{\pi}{6}=1$，

解得$AC=2$． ………………………………………………………………………2 分

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得：$BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\frac{\pi}{6}$

$=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos\frac{\pi}{6}=8-4\sqrt{3}$，………………………………………………4 分

所以$BC=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$． ……………………………………………………5 分

（2）由$\angle ABC=\theta$，则$\angle ACB=\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，$0<\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$．

在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，$AB=2\ \text{km}$，由正弦定理得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$，

所以$BC=\frac{1}{\sin(\theta+\frac{\pi}{6})}$，$AC=\frac{2\sin\theta}{\sin(\theta+\frac{\pi}{6})}$． ……………………………………7 分

记该计划所需费用为$F(\theta)$，

则$F(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{2\sin\theta}{\sin(\theta+\frac{\pi}{6})}\times2\times\frac{1}{2}\times10+\frac{1}{\sin(\theta+\frac{\pi}{6})}\times10=\frac{10(\sin\theta+1)}{\sin(\theta+\frac{\pi}{6})}$ $(0<\theta\leqslant\frac{2\pi}{3})$．

……………………………………………………………………………………10 分

令$f(\theta)=\frac{\sin\theta+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta}$，则$f'(\theta)=\frac{\sin(\theta-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}}{(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta)^2}$，　………………11 分

由 $f'(\theta)=0$，得 $\theta=\frac{\pi}{6}$．所以当 $\theta\in(0,\frac{\pi}{6})$ 时，$f'(\theta)<0$，$f(\theta)$ 单调递减；

当 $\theta\in(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$ 时，$f'(\theta)>0$，$f(\theta)$ 单调递增．……………………………12 分

所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，该计划所需费用最小．……………………………………14 分

15. 解析：（1）因为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\frac{a^2}{c}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，…………………………2 分

解得 $a=3,b=\sqrt{3}$，所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$．……………………………………4 分

（2）①由 $\begin{cases} y=\sqrt{3}x \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x^2=\frac{9}{10} \\ y^2=\frac{27}{10} \end{cases}$，………………………………………………6 分

由 $\begin{cases} y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x^2=\frac{9}{2} \\ y^2=\frac{3}{2} \end{cases}$，……………………………………………………………8 分

所以 $OG=\frac{3\sqrt{10}}{5},OH=\sqrt{6}$，所以 $S_{\Delta GOH}=\frac{3\sqrt{15}}{5}$．……………………………………10 分

②假设存在满足条件的定圆，设圆的半径为 R，则 $OG\cdot OH=R\cdot GH$

因为 $OG^2+OH^2=GH^2$，故 $\frac{1}{OG^2}+\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{R^2}$，

当 OG 与 OH 的斜率均存在时，不妨设直线 OG 方程为：$y=kx$，

由 $\begin{cases} y=kx \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得 $\begin{cases} x_G^2=\frac{9}{1+3k^2} \\ y_G^2=\frac{9k^2}{1+3k^2} \end{cases}$，所以 $OG^2=\frac{9+9k^2}{1+3k^2}$，……………………………12 分

同理可得 $OH^2=\frac{9k^2+9}{3+k^2}$（将 OG^2 中的 k 换成 $-\frac{1}{k}$ 可得）…………………………14 分

$\frac{1}{OG^2}+\frac{1}{OH^2}=\frac{4}{9}=\frac{1}{R^2}$，$R=\frac{3}{2}$，

当 OG 与 OH 的斜率有一个不存在时，可得 $\frac{1}{OG^2}+\frac{1}{OH^2}=\frac{4}{9}=\frac{1}{R^2}$，

故满足条件的定圆方程为：$x^2+y^2=\frac{9}{4}$．…………………………………………………16 分

16 A．**（选修 4—2：矩阵与变换）**

解析：设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，这里 $a, b, c, d\in\mathbf{R}$，

因为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 A 的属于 $\lambda_1=1$ 的特征向量，则有 $\begin{bmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ①，……4 分

又因为$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$是矩阵$A$的属于$\lambda_2=2$的特征向量，则有$\begin{bmatrix}2-a & -b\\ -c & 1-d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ②， ……6 分

根据①②，则有$\begin{cases}1-a-b=0,\\ -c+1-d=0,\\ 2-a=0,\\ -c=0,\end{cases}$ ……………………………………………………8 分

从而$a=2$，$b=-1$，$c=0$，$d=1$，因此$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$， ………………………………………10 分

17. B．（选修 4—4：坐标系与参数方程）

解析：(1) $2\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，得$y-x-2=0$， ……………………2 分

由$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\alpha\\ y=t\cdot\sin\alpha\end{cases}(\alpha为参数)$，

得$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{t^2}=1\left(t\neq\pm\sqrt{3}\right)$. ………………………………………5 分

(2) 由$\begin{cases}y-x-2=0\\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{t^2}=1\end{cases}$ 消去y得$\left(t^3+3\right)x^2+12x+12-3t^2=0$.

因为直线l与椭圆C有公共点,

所以$\Delta=12^2-4\left(t^2+3\right)\left(12-3t^2\right)\geq0$, 即$t^4-t^2\geq0$. ……………7 分

所以t的取值范围是$t\geq1或t\leq-1$，

所以t的取值范围是$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$. ………10 分

18. 解析：解:(1) 以$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AA_1}$为正交基底建立空间直角坐标系$A-xyz$,

设$CP=a\ \ (0\leq a\leq\sqrt{2})$,

则 $CQ=\sqrt{2-a^2},\ P(2,2-a,0),\ Q(2-\sqrt{2-a^2},2,0)$, $\overrightarrow{B_1Q}=(-\sqrt{2-a^2},2,-2)$, $\overrightarrow{D_1P}=(2,-a,-2)$,

$\because B_1Q\perp D_1P$, $\therefore\overrightarrow{B_1Q}\cdot\overrightarrow{D_1P}=0$， $\therefore -2\sqrt{2-a^2}-2a+4=0$，解得$a=1$ ……………………4 分

∴PC=1, CQ=1, 即P、Q分别为$BC,\ CD$中点………………………5 分

(2) 设平面C_1PQ的法向量为$\vec{n}=(a,b,c)$ ， ∵ $\overrightarrow{PQ}=(-1,1,0),\ \overrightarrow{PC_1}=(0,1,2)$ ，又$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC_1}=0$,

$\therefore\begin{cases}-a+b=0\\ b+2c=0\end{cases}$，令$c=-1$，则$a=b=2$, $\vec{n}=(2,2,-1)$ ………………………………………8 分

$\because\vec{k}=(0,0,-2)$为面APQ的一个法向量, $\therefore\cos<\vec{n},\vec{k}>=\dfrac{1}{3}$, 而二面角为钝角, 故余弦值为$-\dfrac{1}{3}$ …10分