

江苏省仪征中学 2021-2022 学年第一学期高二 10 月学情检测

数 学

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分），在每小题所给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 过点 $M(-2, a)$, $N(a, 4)$ 的直线的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 则 $|MN| = ()$

- A. 10 B. 180 C. $6\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{5}$

【答案】D

2. 若直线 l 的斜率 $k \in [-1, \sqrt{3}]$, 则直线倾斜角 α 的范围是 $()$

- A. $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ B. $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$
C. $[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}]$ D. $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$

【答案】B

3. 设向量 $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (1, -\sqrt{3})$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则向量 $\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $()$

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

解：根据题意，设向量 $\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ，向量 $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (1, -\sqrt{3})$ ，若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则有 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x - \sqrt{3} = 0$ ，解得 $x = \sqrt{3}$ ，即 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (1, -\sqrt{3})$ ，则 $\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b} = (0, 4)$ ，则有 $|\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \sqrt{3}\vec{b}^2 = -4\sqrt{3}$ ，则 $\cos\theta = \frac{(\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}||\vec{b}|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，又由 $0 \leq \theta \leq \pi$ ，则 $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ；故选 D。

4. 关于 x 的不等式 $-x^2 + 4ax - 3a^2 \geq 0 (a > 0)$ 的解集为 $[x_1, x_2]$ ，则 $x_1 + x_2 + \frac{3a}{x_1x_2}$ 的最小值是 $()$

- A. 4 B. $2\sqrt{6}$ C. 2 D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

【答案】A

【解答】解： $\because$ 关于 x 的不等式 $-x^2 + 4ax - 3a^2 \geq 0 (a > 0)$ 的解集为 $[x_1, x_2]$ ，

$$\therefore \Delta = 16a^2 - 12a^2 = 4a^2 > 0. \therefore x_1 + x_2 = 4a, x_1x_2 = 3a^2,$$

$$\therefore x_1 + x_2 + \frac{3a}{x_1x_2} = 4a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{4a \cdot \frac{1}{a}} = 4, \text{ 当且仅当 } a = \frac{1}{2} \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore x_1 + x_2 + \frac{3a}{x_1x_2} \text{ 的最小值是 } 4. \text{ 故选 A.}$$

5. 函数 $f(x) = \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 $()$

- A. 4π B. 2π C. π D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】C

【解答】 $f(x) = \cos x \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x (\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 x$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\therefore f(x)$ 的周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. 故选 C.

6. 从点 $P(m, 3)$ 向圆 $C: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$ 引切线, 则切线长的最小值为()

- A. $2\sqrt{6}$ B. $\sqrt{26}$ C. $4 + \sqrt{2}$ D. 5

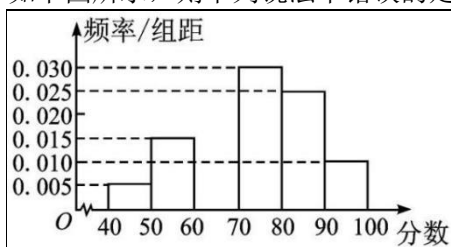
【答案】A

7. 以圆 $C_1: x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ 相交的公共弦为直径的圆的方程为()

- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$
C. $(x+\frac{3}{5})^2 + (y+\frac{6}{5})^2 = \frac{4}{5}$ D. $(x-\frac{3}{5})^2 + (y-\frac{6}{5})^2 = \frac{4}{5}$

【答案】B

8. 某城市在进行创建文明城市的活动中, 为了解居民对“创建文明城”的满意程度, 组织居民给活动打分(分数为整数, 满分 100 分), 从中随机抽取一个容量为 240 的样本, 发现所给数据均在 [40, 100] 内. 现将这些分数分成以下 6 组并画出样本的频率分布直方图, 但不小心污损了部分图形, 如下图所示, 则下列说法中错误的是()



- A. 第三组的频数为 36 人
B. 根据频率分布直方图估计众数为 75 分
C. 根据频率分布直方图估计样本的平均数为 73.5 分
D. 根据频率分布直方图估计样本的中位数为 70 分

【答案】D

【解析】

解: 对于 A, 因为各组的频率之和等于 1,

所以分数在 [60, 70) 内的频率为: $1 - 10 \times (0.005 + 0.015 + 0.030 + 0.025 + 0.010) = 0.15$,

所以第三组 [60, 70) 的频数为 $240 \times 0.15 = 36$ (人), 故正确;

对于 B, 因为众数的估计值是频率分布直方图中最高矩形的中点, 从图中可看出众数的估计值为 75 分, 故正确;

对于 C, 根据频率分布直方图, 样本的平均数的估计值为:

$45 \times (10 \times 0.005) + 55 \times (10 \times 0.015) + 65 \times (10 \times 0.030) + 75 \times (10 \times 0.025) + 85 \times (10 \times 0.010) + 95 \times (10 \times 0.010) = 73.5$ (分), 故正确;

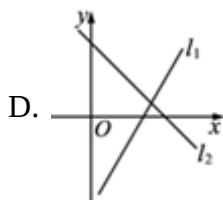
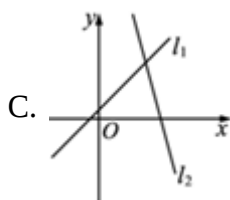
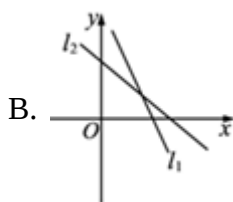
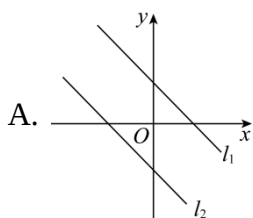
对于 D, 因为 $(0.005 + 0.015 + 0.030) \times 10 = 0.45 < 0.5$, $(0.005 + 0.015 + 0.030 + 0.025) \times 10 > 0.5$,

所以中位数位于 [70, 80) 上, 所以中位数的估计值为: $70 + \frac{0.5-0.45}{0.030} = 75$, 故错误;

故选 D.

二、多选题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分), 在每小题所给出的四个选项中, 每题有两项或两项以上的正确答案, 选对得 5 分, 漏选得 2 分, 不选或错选得 0 分.

9. 已知直线 $l_1: ax - y - b = 0$, $l_2: bx - y + a = 0$, 当 a, b 满足一定的条件时, 它们的图形可以是()



【答案】AC

【解答】

解: 直线 $l_1: ax - y - b = 0$ 可化为 $y = ax - b$, 斜率为 a , 在 y 轴上的截距为 $-b$.

直线 $l_2: bx - y + a = 0$ 可化为 $y = bx + a$, 斜率为 b , 在 y 轴上的截距为 a .

当 $a = b \neq 0$ 时, 直线 l_1 与 l_2 平行, 故 A 正确;

选项 B 中, 由直线在 y 轴上的截距可得 $-b > 0$, $a > 0$,

而由直线 l_1 的斜率为 a , 可得 $a < 0$, 故 B 不正确;

选项 C 中, 由直线 l_2 的斜率为 $b < 0$, 而直线 l_1 在 y 轴上的截距 $-b > 0$,

直线 l_2 在 y 轴上的截距为 $a > 0$, 直线 l_1 的斜率为 $a > 0$, 故 C 正确;

选项 D 中, 两直线斜率 $a > 0$, $b < 0$,

再由直线 l_1 在 y 轴上的截距 $-b < 0$, 则 $b > 0$, 矛盾, 故 D 不正确.

故选: AC.

10. 下列结论错误的是()

A. 过点 $A(1,3)$, $B(-3,1)$ 的直线的倾斜角为 30°

B. 若直线 $2x - 3y + 6 = 0$ 与直线 $ax + y + 2 = 0$ 垂直, 则 $a = -\frac{3}{2}$

C. 直线 $x + 2y - 4 = 0$ 与直线 $2x + 4y + 1 = 0$ 之间的距离是 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. 已知 $A(2,3)$, $B(-1,1)$, 点 P 在 x 轴上, 则 $|PA| + |PB|$ 的最小值是 5

【答案】ABC

11. 下列命题正确的有()

A. 若方程 $x^2 + y^2 + mx - 2y + 3 = 0$ 表示圆, 则 m 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

B. 若圆 C 的半径为 1, 圆心在第一象限, 且与直线 $4x - 3y = 0$ 和 x 轴都相切, 则该圆的标准方程是 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

C. 已知点 $P(x, y)$ 在圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$ 上, $\frac{y}{x}$ 的最大值为 1

D. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$ 和 $C_2: x^2 + y^2 - 10x - 12y + 45 = 0$, 圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{7}$

【答案】BD

12. 给出下列四个结论, 其中正确的结论是()

A. 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$;

B. 若函数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ 是定义在区间 $[a-2, b]$ 上的偶函数, 则 $b = 2$;

C. 已知函数 $y = \log_a(2-ax)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是 $(1, 2)$;

D. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内有 1010 个零点, 则函数 $f(x)$ 的零点个数为 2021

解: 对于 A, 当 $x = 1$ 时, $y = 1$, 函数的最大值不是 $\frac{1}{2}$, 题中的命题错误, 对于 B, 由函数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ 是定义在区间 $[a-2, b]$ 上的偶函数, 知 $a = 0$ 且 $b + (a-2) = 0$, $\therefore b = 2$. 故 B 正确; 对于 C, 由 $a > 0$ 可得函数 $y = 2 - ax$ 单调递减, 若要使函数 $y = \log_a(2-ax)$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数, 则 $\begin{cases} a > 1 \\ 2-a \geq 0 \end{cases}$, 解得 $a \in (1, 2]$, 故 C 错误; 对于 D, 由奇函数的性质可得函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有 1010 个零点, 且 $f(0) = 0$, 所以函数 $f(x)$ 的零点个数为 2021, 故 D 正确; 故选: BD.

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知复数 $z = \frac{i(1-3i)}{1+i}$, 则复数 $\bar{z}$ 的虚部为_____.

【答案】1

【解析】解: $\because$ 复数 $z = \frac{i(1-3i)}{1+i} = \frac{i(1-3i)(1-i)}{1-i^2} = \frac{-2i+4}{1+1} = 2-i$, $\therefore \bar{z} = 2+i$, 其虚部是 1.

14. 两圆 $x^2 + y^2 = 1$, $(x+4)^2 + (y-a)^2 = 25$ 相切, 则实数 $a =$ _____.

【答案】 $\pm 2\sqrt{5}$ 或 0

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = f(x) + x + a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围是_____.

解: 由题意, 令 $h(x) = -x - a$, 则 $g(x) = f(x) - h(x)$, 在同一坐标系中画出 $y = f(x)$, $y = h(x)$ 图象, 如图所示.

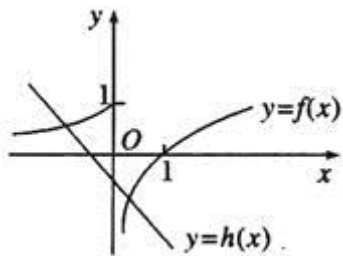
若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 $y = f(x)$ 的图象与 $y = h(x)$ 的图象有 2 个交点,

平移 $y = h(x)$ 的图象可知, 当 $h(x) = -x - a$ 过点 $(0, 1)$ 时, 有 2 个交点, 此

时有 $1 = -0 - a$, 所以 $a = -1$; 当 $h(x) = -x - a$ 在 $y = -x + 1$ 的上方, 即

$a < -1$ 时, 此时: $y = f(x)$ 的图象与 $y = h(x)$ 的图象仅有 1 个交点, 不符合题意; 当 $h(x) = -x - a$

在 $y = -x + 1$ 的下方, 即 $a > -1$ 时, 此时: $y = f(x)$ 的图象与 $y = h(x)$ 的图象有 2 个交点, 符合



题意；综上， a 的取值范围为 $[-1, +\infty)$ 。故答案为 $[-1, +\infty)$ 。

16. 已知实数 x_1, x_2, y_1, y_2 满足： $x_1^2 + y_1^2 = 1, x_2^2 + y_2^2 = 1, x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}$ ，则 $\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为_____。

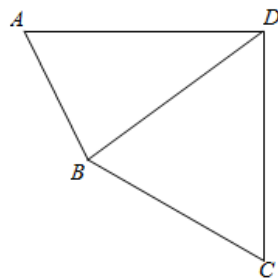
【答案】 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. （本小题满分 10 分）在平面四边形 $ABCD$ 中， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $\angle A = 45^\circ$ ， $AB = 2$ ， $BD = 5$ 。

(1) 求 $\cos \angle ADB$ ；

(2) 若 $DC = 2\sqrt{2}$ ，求 BC 。



【答案】解：(1) $\because \angle ADC = 90^\circ$ ， $\angle A = 45^\circ$ ， $AB = 2$ ， $BD = 5$ 。

$\therefore$ 由正弦定理得： $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle A}$ ，即 $\frac{2}{\sin \angle ADB} = \frac{5}{\sin 45^\circ}$ ，

$\therefore \sin \angle ADB = \frac{2 \sin 45^\circ}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5}$ ，

$\because AB < BD$ ， $\therefore \angle ADB < \angle A$ ，

$\therefore \cos \angle ADB = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{23}}{5}$ 。

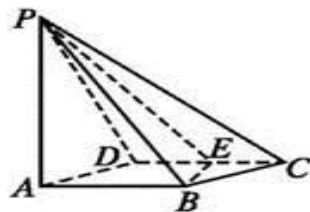
(2) $\because \angle ADC = 90^\circ$ ， $\therefore \cos \angle BDC = \sin \angle ADB = \frac{\sqrt{2}}{5}$ ，

$\because DC = 2\sqrt{2}$ ， $\therefore BC = \sqrt{BD^2 + DC^2 - 2 \times BD \times DC \times \cos \angle BDC} = \sqrt{25 + 8 - 2 \times 5 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{5}} = 5$ 。

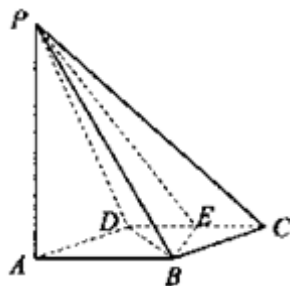
18. （本小题满分 12 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形， $\angle BCD = 60^\circ$ ， E 是 CD 的中点， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PA = \sqrt{3}$ 。

(1) 求证：平面 $PBE \perp$ 平面 PAB ；

(2) 求二面角 $A-BE-P$ 的大小



【答案】证明：(1) 如图所示，连接 BD ，由 $ABCD$ 是菱形且 $\angle BCD = 60^\circ$ 知， $\triangle BCD$ 是等边三角形。因为 E 是 CD 的中点，所以 $BE \perp CD$ ，又 $AB \parallel CD$ ，所以 $BE \perp AB$ ，又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $BE \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $PA \perp BE$ ，而 $PA \cap AB = A$ ，因此 $BE \perp$ 平面 PAB 。又 $BE \subset$ 平面 PBE ，所以平面 $PBE \perp$ 平



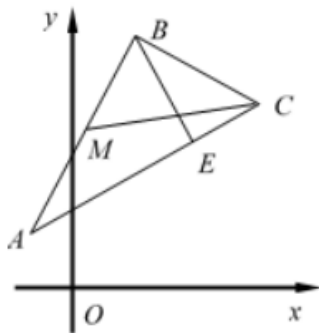
面 PAB . 解: (2) 由 (I) 知, $BE \perp$ 平面 PAB , $PB \subset$ 平面 PAB , 所以 $PB \perp BE$. 又 $AB \perp BE$, 所以 $\angle PBA$ 是二面角 $A - BE - P$ 的平面角. 在 $Rt\triangle PAB$ 中,

$$\tan \angle PBA = \frac{PA}{AB} = \sqrt{3}, \angle PBA = 60^\circ. \text{ 故二面角 } A - BE - P \text{ 的大小为 } 60^\circ$$

19. (本小题满分 12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $A(-1, 2)$, 边 AC 上的高 BE 所在的直线方程为 $7x + 4y - 46 = 0$, 边 AB 上中线 CM 所在的直线方程为 $2x - 11y + 54 = 0$.

(1) 求点 C 坐标;

(2) 求直线 BC 的方程.



【答案】解: (1) 边 AC 上的高 BE 所在的直线方程为 $7x + 4y - 46 = 0$,

故边 AC 所在的直线的斜率为 $\frac{4}{7}$,

所以边 AC 所在的直线的方程为 $y - 2 = \frac{4}{7}(x + 1)$,

$$\text{即 } 4x - 7y + 18 = 0,$$

因为 CM 所在的直线方程为 $2x - 11y + 54 = 0$,

$$\text{由 } \begin{cases} 2x - 11y + 54 = 0, \\ 4x - 7y + 18 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases},$$

所以 $C(6, 6)$.

(2) 设 $B(x_0, y_0)$, M 为 AB 中点, 则 M 的坐标为 $(\frac{x_0 - 1}{2}, \frac{y_0 + 2}{2})$,

$$\text{由 } \begin{cases} 2 \times \frac{x_0 - 1}{2} - 11 \times \frac{y_0 + 2}{2} + 54 = 0, \\ 7x_0 + 4y_0 - 46 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 8 \end{cases}$$

所以 $B(2, 8)$,

又因为 $C(6,6)$,

所以直线 BC 的方程为 $y - 6 = \frac{8-6}{2-6}(x - 6)$,

即 $x + 2y - 18 = 0$.

20. (本小题满分 12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y + F = 0$, 且圆 C 被直线 $x - y + 3 + \sqrt{2} = 0$ 截得的弦长为 2.

(1) 求圆 C 的标准方程;

(2) 若圆 C 的切线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距相等, 求切线 l 的方程;

(3) 若圆 $D: (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 2$ 上存在点 P , 由点 P 向圆 C 引一条切线, 切点为 M , 且满足 $PM = \sqrt{2}PO$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】解: (1) 由题意得圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y + F = 0$,

即 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 - F$,

$\therefore F < 5$,

$\therefore$ 圆心坐标为 $(-1, 2)$, 半径 $r^2 = 5 - F$,

又 $\therefore$ 圆心到直线 $x - y + 3 + \sqrt{2} = 0$ 的距离 $d = \frac{|-1-2+3+\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 1$,

又弦长为 2,

$\therefore d^2 + 1^2 = r^2$,

$\therefore F = 3$,

$\therefore$ 圆 C 的标准方程为: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$.

(2) 因为直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距相等,

① 若直线 l 过原点, 则假设直线 l 的方程为 $y = kx$, ~~即~~ $kx - y = 0$,

因为直线 l 与圆 C 相切,

所以 $d = \frac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = r = \sqrt{2}$,

即 $k^2 - 4k - 2 = 0$, 解得 $k = 2 \pm \sqrt{6}$,

故直线 l 的方程为 $y = (2 + \sqrt{6})x$ 或 $y = (2 - \sqrt{6})x$;

② 若直线 l 不过原点, 切线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距相等,

则假设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, ~~即~~ $x + y - a = 0$,

因为直线 l 与圆 C 相切, $\therefore d = \frac{|-1+2-a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = r = \sqrt{2}$,

$\therefore |1 - a| = 2$, 解得 $a = 3$ 或 $a = -1$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x + y - 3 = 0$ 或 $x + y + 1 = 0$;

综上所述直线 l 的方程为 $y = (2 + \sqrt{6})x$ 或 $y = (2 - \sqrt{6})x$ 或 $x + y - 3 = 0$ 或 $x + y + 1 = 0$;

(3) 假设 P 点坐标为 (x, y) , $\therefore$ 点 P 满足 $PM = \sqrt{2}PO$,

$\therefore PM^2 = 2PO^2$,

$\therefore$ 直线 PM 与圆 C 相切, 且 M 为切点,

$\therefore PM^2 = PC^2 - r^2$,

$\therefore 2PO^2 = PC^2 - 2$,

$\therefore 2(x^2 + y^2) = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 2$,

$\therefore x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$,

~~即~~ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$,

又 $\therefore$ 点 P 在圆 $D: (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 2$ 上,

$\therefore$ 两圆有公共点且不能内切,

$$\therefore \sqrt{2} < \sqrt{(1-a)^2 + (-2-1)^2} \leq 3\sqrt{2},$$

$$\text{又 } \sqrt{(1-a)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{(1-a)^2 + 9} > \sqrt{2} \text{ 恒成立,}$$

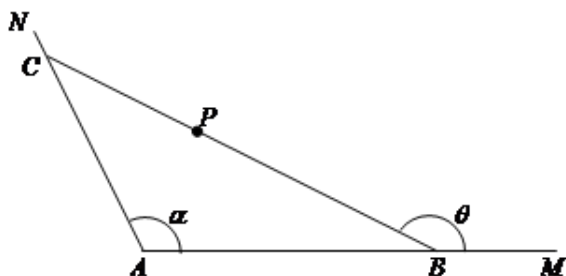
$$\therefore \sqrt{(1-a)^2 + 9} \leq 3\sqrt{2},$$

$$\therefore (a-1)^2 \leq 9,$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 4,$$

$\therefore a$ 的取值范围为: $[-2, 4]$.

21. (本小题满分 12 分) 公路 AM , AN 围成的是一块顶角为 α 的角形耕地, 其中 $\tan \alpha = -2$. 在该块土地中 P 处有一小型建筑, 经测量, 它到公路 AM , AN 的距离分别为 3km 、 $\sqrt{5}\text{km}$. 现要过点 P 修建一条直线型公路 BC , 将三条公路围成的区域 ABC 建成一个工业园, 如图.



(1) 记 $\angle CBM = \theta$, 并设 $\tan \theta = k$, 试确定 k 的取值范围;

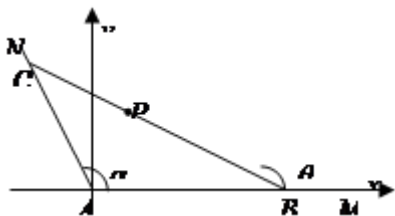
(2) 设三角形区域工业园的占地面积为 S , 试将 S 表示成 k 的函数 $S = f(k)$;

(3) 为尽量减少耕地占用, 如何确定点 B 的位置, 使得该工业园区的面积最小? 并求最小面积.

【答案】 解: (1) 由题意得 $90^\circ < \alpha < \theta < 180^\circ$, 所以 $\tan \alpha < \tan \theta < 0$,

即 $-2 < k < 0$.

(2) 以点 A 为原点, AM 所在直线为 x 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系,



则由已知得 AN 所在直线的方程为 $y = -2x$, 即 $2x + y = 0$.

根据已知设 P 点坐标为 $(x_0, 3)$, 由点 P 到公路 AN 的距离为 $\sqrt{5}km$ 得 $\frac{|2x_0+3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

解得 $x_0 = 1$ 或 $x_0 = -4$. 当 $x_0 = -4$ 时, 点 P 不在指定区域, 故舍去, 所以 $P(1, 3)$.

所以公路 BC 所在直线的方程为 $y - 3 = k(x - 1)$.

令 $y = 0$, 得 $x = 1 - \frac{3}{k}$, 即 $B(1 - \frac{3}{k}, 0)$.

将 $y = -2x$ 代入 $y - 3 = k(x - 1)$ 得 $x = \frac{k-3}{k+2}$, $y = \frac{-2(k-3)}{k+2}$,

即 $C(\frac{k-3}{k+2}, \frac{-2(k-3)}{k+2})$.

所以 $S = f(k) = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{3}{k}) (\frac{-2(k-3)}{k+2}) = -\frac{(k-3)^2}{k(k+2)} (k \in (-2, 0))$.

(3) 由 (2) 得 $(1 + S)k^2 + (2S - 6)k + 9 = 0$.

有 $\Delta = (2S - 6)^2 - 36(1 + S) \geq 0$. 解得 $S \leq 0$ (舍) 或 $S \geq 15$.

当 $S = 15$ 时, $k = -\frac{3}{4} \in (-2, 0)$, 满足条件.

故面积的最小值为 15, 此时 $B(5, 0)$.

综上所述, 当点 B 距离点 $A 5km$ 时, 该工业园区的面积最小, 最小面积为 $15 km^2$.

22. (本小题满分 12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 在直线 $l: y = 7x + 4$ 上, $B(7, 3)$, 以线段 AB 为直径的圆 C (C 为圆心) 与直线 l 相交于另一个点 D , $AB \perp CD$.

(1) 求圆 C 的标准方程;

(2) 若点 A 不在第一象限内, 圆 C 与 x 轴的正半轴的交点为 P , 过点 P 作两条直线分别交圆于 M , N 两点, 且两直线的斜率之积为 -5 , 试判断直线 MN 是否恒过定点, 若是, 请求出定点的坐标; 若不是, 请说明理由.

【答案】解: (1) $\because AB$ 为圆 C 直径且点 D 在圆上,

$\therefore BD \perp AD$, $\therefore k_{BD} = -\frac{1}{7}$,

设 $D(a, 7a + 4)$, 得 $\frac{7a+4-3}{a-7} = -\frac{1}{7}$, 得 $a = 0$.

$\therefore D(0, 4)$,

在 $\triangle ABD$ 中, $AB \perp CD$, C 为 AB 的中点, $\therefore |AD| = |BD|$,

设 $A(b, 7b + 4)$, 则 $\sqrt{(b-0)^2 + (7b+4-4)^2} = \sqrt{(7-0)^2 + (3-4)^2}$,

解得 $b = 1$ 或 $b = -1$. 设圆 C 的半径为 R , 则

①当 $b = 1$ 时, $A(1, 11)$, $2R = \sqrt{2}|AD| = 10$, 圆心为 $(4, 7)$,

此时圆的标准方程为 $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 25$;

②当 $b = -1$ 时, $A(-1, -3)$, $2R = \sqrt{2}|AD| = 10$, 圆心为 $(3, 0)$,

此时圆的标准方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 25$.

$\therefore$ 圆的标准方程为 $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 25$ 或 $(x-3)^2 + y^2 = 25$;

(2)由题意知, 若点 A 不在第一象限内, 则 $A(-1, -3)$, 圆的标准方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 25$.

因为圆 C 与 x 轴的正半轴的交点为 P , 则 P 点的坐标为 $(8, 0)$,

由题意得直线 MP , NP 的斜率一定存在,

设直线 MP 的方程为 $y = k(x-8)$,

联立 $\begin{cases} y = k(x-8) \\ (x-3)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$, 得 $(1+k^2)x^2 - (6+16k^2)x + 64k^2 - 16 = 0$.

$\therefore x_M \cdot x_P = \frac{64k^2-16}{1+k^2}$, 得 $x_M = \frac{8k^2-2}{1+k^2}$, 则 $M(\frac{8k^2-2}{1+k^2}, \frac{-10k}{1+k^2})$,

$\therefore$ 两直线的斜率之积为 -5 , $\therefore$ 用 $-\frac{5}{k}$ 代替 k , 可得 $N(\frac{200-2k^2}{25+k^2}, \frac{50k}{25+k^2})$.

当直线 MN 的斜率存在, 即 $k^2 \neq 5$ 时,

$$k_{MN} = \frac{\frac{50k}{k^2+25} + \frac{10k}{k^2+1}}{\frac{200-2k^2}{k^2+25} - \frac{8k^2-2}{k^2+1}} = \frac{60k^3+300k}{-10k^4+250} = \frac{6k}{-k^2+5}.$$

$\therefore$ 直线 MN 的方程为 $y - \frac{-10k}{1+k^2} = \frac{6k}{5-k^2}(x - \frac{8k^2-2}{1+k^2})$,

整理得: $y = \frac{6k}{5-k^2}(x - \frac{19}{3})$, 可得直线 MN 过定点 $(\frac{19}{3}, 0)$;

当直线 MN 的斜率不存在时, 即 $k^2 = 5$ 时, 直线 MN 的方程为 $x = \frac{19}{3}$, 过定点 $(\frac{19}{3}, 0)$.

综上所述, 直线 MN 恒过定点 $(\frac{19}{3}, 0)$.