江苏省仪征中学 2020 届高三上学期数学周末限时训练 10（2019.11.23）

范围：江苏高考Ⅰ卷全部内容（除立体几何外）

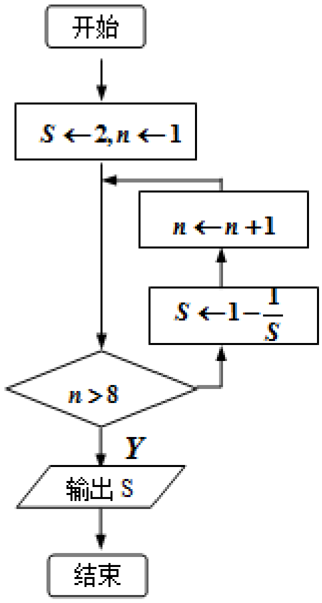
一、填空题（共计 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分）

1．已知集合 $A=\{x|-1\le x\le 1\}$, 则 $A\cap Z=$________．

2. 若复数 $z=(1-i)(m+2i)$(i 为虚数单位）是纯虚数，则实 数 m 的值为____________．

3．数据 10，6，8，5，6 的方差 $s^2=$_________．

4．抛掷甲、乙两枚质地均匀且四面上分别标有 1，2，3，4 的正四面体，记底面上的数字分别为 x,y，则 $\dfrac{x}{y}$ 为整数的概率是_________．



第 6 题图

5．已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{m^2}=1(m>0)$ 的一条渐近线方程为 $x+\sqrt{3}y=0,$ 则 $m=$_____________．

6．执行如图所示的算法流程图，则输出的结果是______．

7．若 k,-1,b 三个数成等差数列,则直线$y=kx+b$必经过定点______．

8. 若等差数列$\{a_n\}$满足$a_7+a_8+a_9>0$,$a_7+a_{10}<0$,则当 $n=$______时,$\{a_n\}$的前 n 项和最大.

9．若数列$\{a_n\}$满足$a_1=12$,$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2a_n$,则$a_{2017}=$______ .

10.直线 $ax+y+1=0$ 被圆 $x^2+y^2-2ax+a=0$ 截得的弦长为 2，则实数 a 的值是_______．

11．将函数 $f(x)=-x^2+2x,$ 则不等式 $f(\log_2 x)<f(2)$ 的解集为____________．

12．将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 φ $(\varphi>0)$ 个单位，若所得图象过点 $(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，则 φ 的最小值为_____________．

13．在 ΔABC 中，$AB=2,AC=3,$ 角 A 的平分线与 AB 边上的中线交于点 O，若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}(x,y\in R),$ 则 $x+y$ 的值为_____________．

14．已知函数 $f(x)=e^{x-1}+x-2$(e 为自然对数的底数），$g(x)=x^2-ax-a+3,$ 若存在实数 x_1,x_2，使得 $f(x_1)=g(x_2)=0,$ 且 $|x_1-x_2|\le 1,$ 则实数 a 的取值范围是______________．

二、解答题：

15.（本小题满分 14 分）已知向量$\vec{a}=(\sin x,\frac{3}{2}),\vec{b}=(\cos x,-1)$.

(1)当$\vec{a}//\vec{b}$时,求$2\cos^2 x-\sin 2x$的值；

（2）求 $f(x)=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$ 在 $[-\frac{\pi}{2},0]$上的值域.

\

16.（本小题满分 14 分）

已知命题 p：$x^2-4x-5\le 0$,命题 q：$x^2-2x+1-m^2\le 0(m>0)$.

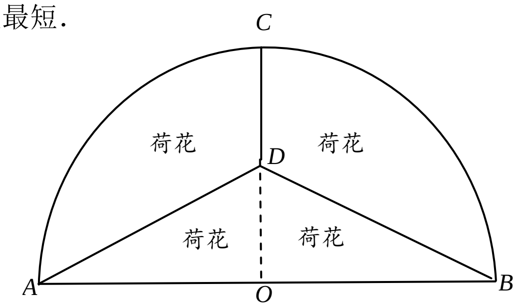
(1)若 p 是 q 的充分条件,求实数 m 的取值范围；

(2)若$m=5$,$p\vee q$为真命题,$p\wedge q$为假命题,求实数 x 的取值范围.

17.（本小题满分 14 分）某湿地公园围了一个半圆形荷花塘如图所示，为了提升荷花池的观赏性，现计划在池塘的中轴线 OC 上设计一个观景台 D（点 D 与点 O，C 不重合），其中 AD，BD，CD 段建设架空木栈道，已知 $AB=2$ km，设建设的架空木栈道的总长为 $y$km.

（1）设 $\angle DAO=\theta(\text{rad})$，将 y 表示成 θ 的函数关系式，并写出 θ 的取值范围；

（2）试确定观景台的位置，使三段木栈道的总长度最短.



18.（本小题满分 16 分）已知椭圆 E：$x^2+9y^2=m^2$（$m>0$），直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 E 有两个交点 A,B，线段 AB 的中点为 M.

（1）若 $m=3$，点 K 在椭圆 E 上，F_1、F_2 分别为椭圆的两个焦点，求 $\overrightarrow{KF_1}\cdot\overrightarrow{KF_2}$ 的范围；

（2）证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；

（3）若 l 过点 $(m,\dfrac{m}{3})$，射线 OM 与椭圆 E 交于点 P，四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形？若能，求此时直线 l 斜率；若不能，说明理由.

.

19.（本小题满分 16 分）已知数列$\{a_n\}$满足$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}+k(n\in N^*,k\in R)$，且
$a_1=2,a_3+a_5=-4.$

（1）若$k=0,$求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n;

（2）若$a_4=-1,$ ①求证：数列$\left\{a_{n+1}-a_n\right\}$为等差数列； ②求数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n$.

20.（本小题满分 16 分）已知函数 $f(x)=\cos x+ax^2-1,a\in R.$

（1）求证：函数 $f(x)$ 是偶函数;

（2）当$a=1,$求函数 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上的最大值和最小值;

（3）若对于任意的实数 x 恒有 $f(x)\geq 0,$ 求实数a 的取值范围.

江苏省仪征中学2020届高三上学期数学周末限时训练10答案

一．填空题：

1．$\{-1,0,1\}$　2．-2　3．$\frac{16}{5}$　4．$\frac{1}{2}$　5．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　6．-1　7．$(1,-2)$　8．8　9．$\frac{12}{2017}$

10．-2　11．$(0,1)\cup(4,+\infty)$　12．$\frac{\pi}{6}$　13．$\frac{5}{8}$　14．$[2,3]$

二．解答题：

15．（1）$\because \vec{a}//\vec{b}$，$\therefore \frac{3}{2}\cos x+\sin x=0,\ \therefore \tan x=-\frac{3}{2}$ ……………………3分

$2\cos^2 x-\sin 2x=\frac{2\cos^2 x-2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{2-2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{20}{13}$…. ………6分

（2）$\because \vec{a}+\vec{b}=(\sin x+\cos x,\frac{1}{2})$，$f(x)=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

$\because -\frac{\pi}{2}\le x\le 0,\ \therefore -\frac{3\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}$，$\therefore -1\le\sin(2x+\frac{\pi}{4})\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ … ……10分

$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le\frac{1}{2}$，$\therefore$函数$f(x)$的值域$[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}]$ ………………14分

16．解：(1)对于p：$A=[-1,5]$,
对于q：$B=[1-m,1+m]$,p是q的充分条件,
可得$A\subseteq B$,

$$\therefore\begin{cases}1-m\le-1\\1+m\ge5\end{cases},$$

$\therefore m\in[4,+\infty)$.
(2)$m=5$,如果p真：$A=[-1,5]$,如果q真：$B=[-4,6]$,
$p\vee q$为真命题,$p\wedge q$为假命题,
可得p,q一真一假,
①若p真q假,则$\begin{cases}-1\le x\le5\\x<-4\text{ 或}x>6\end{cases}$,无解；
②若p假q真,则$\begin{cases}x<-1\text{ 或}x>5\\-4\le x\le6\end{cases}$,
$\therefore$实数x的取值范围是$[-4,-1)\cup(5,6]$.

17．解：（1）由$\angle DAO=\theta$，$OC\perp AB$，$OA=OB=1$，

则$DA=DB=\frac{1}{\cos\theta}$，$DO=\tan\theta$，所以$DC=1-\tan\theta$，　　………………4分

所以 $y=DA+DB+DC=\dfrac{2}{\cos\theta}+1-\tan\theta=\dfrac{2-\sin\theta}{\cos\theta}+1, 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$. ………………7 分

（注：表达式 2 分，θ 的的取值范围 1 分）

(2) $y'=\dfrac{2\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$， ………………9 分

令 $y'=0$，得 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，又 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$， ………………10 分

当 $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ 时，$y'<0$，y 是 θ 的减函数；当 $\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ 时，$y'>0$，y 是 θ 的增函数.

………………12 分

所以，当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$y_{\min}=\sqrt{3}+1$，此时 $DO=\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………………13 分

答：当 D 位于线段 AB 的中垂线上且距离 AB 边 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ km 处时,能使三段木栈道总长度最短.

………………14 分

18．解：（Ⅰ）$m=3$，椭圆 E：$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$，两个焦点 $F_1(-2\sqrt{2},0)$，$F_2(2\sqrt{2},0)$，

设 $K(x,y)$，$\overrightarrow{F_1K}=(x+2\sqrt{2},y)$，$\overrightarrow{F_2K}=(x-2\sqrt{2},y)$，

$\overrightarrow{KF_1}\cdot\overrightarrow{KF_2}=\overrightarrow{FK_1}\cdot\overrightarrow{F_2K}=(x+2\sqrt{2},y)\cdot(x-2\sqrt{2},y)=x^2+y^2-8=-8y^2+1$，

$\because -1\le y\le 1$，$\therefore$ $\overrightarrow{KF_1}\cdot\overrightarrow{KF_2}$ 的范围是 $[-7,1]$（4 分）

（2）设 A,B 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则 $\begin{cases}x_1^2+9y_1^2=m^2,\\x_2^2+9y_2^2=m^2.\end{cases}$ 两式相减，得

$(x_1+x_2)(x_1-x_2)+9(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，$1+9\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=0$，即 $1+9k_{OM}\cdot k_l=0$，故

$k_{OM}\cdot k_l=-\dfrac{1}{9}$；（8 分）

（3）$\because$ 直线 l 过点 $(m,\dfrac{m}{3})$，

$\therefore$ 直线 l 不过原点且与椭圆 E 有两个交点的充要条件是 $k>0$ 且 $k\neq\dfrac{1}{3}$.

设 $P(x_P,y_P)$，设直线 $l:y=k(x-m)+\dfrac{m}{3}$（$m\neq 0,k\neq 0$），即 $l:y=kx-km+\dfrac{m}{3}$，

由（2）的结论可知 $OM:y=-\dfrac{1}{9k}x$，代入椭圆方程得，$x_P^2=\dfrac{9m^2k^2}{9k^2+1}$，（10 分）

由 $y=k(x-m)+\dfrac{m}{3}$ 与 $y=-\dfrac{1}{9k}x$，联立得 $M\left(\dfrac{9k^2m-3km}{9k^2+1},-\dfrac{km-\dfrac{m}{3}}{9k^2+1}\right)$．（12 分）

若四边形 $OAPB$ 为平行四边形，那么 M 也是 OP 的中点，所以 $2x_0=x_P$，

即 $4\left(\dfrac{9k^2m-3km}{9k^2+1}\right)^2=\dfrac{9m^2k^2}{9k^2+1}$，整理得 $9k^2-8k+1=0$ 解得，$k=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{9}$．

所以当 $k=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{9}$ 时，四边形 $OAPB$ 为平行四边形．（16 分）

19．（1）当 $k=0$ 时，$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，即 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，

所以，数列 $\{a_n\}$ 是等差数列．……………………2 分

设数列 $\{a_n\}$ 公差为 d，则 $\begin{cases}a_1=2,\\2a_1+6d=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=2,\\d=-\dfrac{4}{3}.\end{cases}$ ……………4 分

所以，$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times(-\dfrac{4}{3})=-\dfrac{2}{3}n^2+\dfrac{8}{3}n$．…………6 分

（2）由题意，$2a_4=a_3+a_5+k$，即 $-2=-4+k$，所以 $k=2$．……………8 分

又 $a_4=2a_3-a_2-2=3a_2-2a_1-6$，所以 $a_2=3$，由 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}+2$，

得 $(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=-2$，

所以，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 $a_2-a_1=1$ 为首项，-2 为公差的等差数列．

所以 $a_{n+1}-a_n=-2n+3$，……………………10 分

当 $n\geqslant 2$ 时，有 $a_n-a_{n-1}=-2(n-1)+3$，

于是，$a_{n-1}-a_{n-2}=-2(n-2)+3$，

$a_{n-2}-a_{n-3}=-2(n-3)+3$，

…

$a_3-a_2=-2\times 2+3$，

$a_2-a_1=-2\times 1+3$，

叠加得，$a_n-a_1=-2(1+2+\cdots+(n-1))+3(n-1),(n\geqslant 2)$，

所以 $a_n=-2\times\dfrac{n(n-1)}{2}+3(n-1)+2=-n^2+4n-1,(n\geqslant 2)$，……………………13 分

又当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 也适合．

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=-n^2+4n-1,n\in\mathbf{N}^*$．…………………14

20．（1）函数 $f(x)$ 的定义域为**P**，

因为 $f(-x)=\cos(-x)+a(-x)^2-1=\cos x+ax^2-1=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 是偶函数．　　　　……………………………………3分

（2）当 $a=1$ 时，$f(x)=\cos x+x^2-1$，则 $f'(x)=-\sin x+2x$，

令 $g(x)=f'(x)=-\sin x+2x$，则 $g'(x)=-\cos x+2>0$，所以 $f'(x)$ 是增函数，

又 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在[0，π]上是增函数，

又函数 $f(x)$ 是偶函数，

故函数 $f(x)$ 在[−π，π]上的最大值是 π^2-2，最小值为0．…………………………8分

（3） $f'(x)=-\sin x+2ax$，

令 $g(x)=f'(x)=-\sin x+2ax$，则 $g'(x)=-\cos x+2a$，

①当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)=-\cos x+2a\geqslant 0$，所以 $f'(x)$ 是增函数，

又 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在$[0，+\infty)$上是增函数，

而 $f(0)=0$，$f(x)$ 是偶函数，

故 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立．……………………………………………12分

②当 $a\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)=-\cos x+2a\leqslant 0$，所以 $f'(x)$ 是减函数，

又 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 在$(0，+\infty)$上是减函数，

而 $f(0)=0$，$f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)<0$，与 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾，故舍去．………14分

③当$-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$时，必存在唯一 $x_0\in(0，\pi)$，使得 $g'(x_0)=0$，

因为 $g'(x)=-\cos x+2a$ 在$[0，\pi]$上是增函数，

所以当 $x\in(0，x_0)$时，$g'(x)<0$，即 $f'(x)$ 在$(0，x_0)$上是减函数，

又 $f'(0)=0$，所以当 $x\in(0，x_0)$时，$f'(x)<0$，，即 $f(x)$ 在$(0，x_0)$上是减函数，

而 $f(0)=0$，所以当 $x\in(0，x_0)$时，$f(x)<0$，与 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾，故舍去．

综上，实数 a 的取值范围是$[\frac{1}{2}，+\infty)$．　　　　……………………………………………16分