中学数学和大学数学的本质区别对学习和教学的影响（续）

冯淑霞[1] 黎景辉[1] 梁志斌[2] 俞小祥[3] 朱一心[2]

（1. 河南大学 475004；2. 首都师范大学 100048；3. 江苏师范大学 221116）

5 讨论

为了帮助读者更快掌握本文的要旨，我们缩短正文把部分材料放在本节讨论.

（1）本文只是提出一个观点，而并不是建议全面改革数学教育. 我们只希望引起一些老师的关注和帮助一些有能力的同学学习. 也许有一天，会有更多人支持数学教学内容是介绍数学结构，而不是多次重复同样的习题，直至看一眼比谁都快写下答案. 我们没有提供课本、教案、辅导教材、标准例子、习题解答、典型题型及考研题型、解题的规律、方法和技巧. 也没有提供足够的中学数学的具体例子，让中学老师能体会、能抓个人手点. 以下我们将会继续讨论这个观点，在此先说明几点，一、现行的中学数数学课程是几乎不谈「数学结构」，那又怎样找中学数学的具体例子呢？因此我们的建议对那些只是打算依书直灌的老师是没有用的. 二、每一个新的「数学结构」的出现，都是一个创新，一个数学革命. 上文的例子：求解五次方程的失败，求三次多项式平方根的积分，平行公理与空间曲率. 每一次都轰轰烈烈的改变了数学，甚至改变了世界. 这些例子都是很具体的，但在人类的历史里当然不是天天出现. 我们同意对一般的中学生中学老师来说是比较难. 但是若有老师能说说这些问题和解，就应该已经是个好故事了，证明只是很少数的学生才有机会看到的. 三、假如我们定义高中数学教育为疯狂地做千百次同一题目，定义高考为解题斗快比赛，完全禁止学生知道过去两百年在数学里发生了什么事，那样就别怪学生没有创意，不喜欢和不能够做数学了.

（2）软件. 我们说的数学的两个性质——计算性，结构性——并不是纸上谈兵. 最常见分别实现这两个性质的便是数学软件. 虽然这不是本文的主题，但是还是值得介绍. 有机会使用这些软件的同学会更容易体会本文的要旨.

（i）计算类.

（a）做数值计算，如数值线性代数，有限元方法，图像处理，三维绘图：MATLAB，Analytica，GNU（免费），SageMath（免费）.

（b）做符号计算，计算不定积分，解微分方程，计算极限和级数，Groebner 基：Mathematica，Maple（这两种也可以做以上(a)类的计算）.

（ii）代数结构类.

Magma-代数几何，Singular（免费）-多项式计算和奇异点，Gap（免费）-群论，LiE（免费）-李群表示.

当然几乎所有大学一年级的数学习题，像计算不定积分，解线性方程组，这些软件都可以一秒解答. 因此只要把计算不定积分的技巧说清楚，就不用要学生做三百题，可把时间花在学习一些现代的内容上. 请看王昆扬的创新的微积分教科书：《简明数学分析》. 当然软件也不是万能的. 例如，Magma 应该是处理椭圆曲线最厉害的软件，但是只能算出一部分的椭圆曲线的 L 函数. 目前国内近三千所大专院校安装有这些软件的数学系并不多，一般系里亦没有几个完全熟悉这些软件的老师，花时间在软件上不如写论文划算. 使用这些软件是需要对数学结构和计算机程序有一定的认识，因此，同学也不是念几个月大学便可以掌握的.

（3）我们没有像 Bourbaki 学派的集合论（Theorie des Ensembles，Chap I & IV）那样给出数学结构的严格定义，原因之一是在没有确定好严格的逻辑及公理集合论之前，去定义数学结

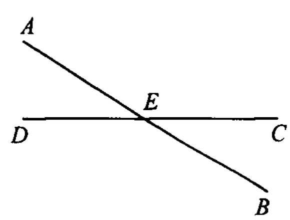
构，容易犯错（即使 Bourbaki 亦受批评，如 A. Mathias, Hilbert, Bourbaki and the scorning of logic）. 其二，为了包括范畴理论，Grothendieck 建议在集合公理系统 ZFC 加入宇宙公理（SGA4, i. 0, i. 11），我们还未完全了解这种公理系统的逻辑结构. 其三，文中通过例子建立的直观认识已足够本文讨论的需要.

一般同时讲逻辑及公理集合论的教科书都会在两者之间定义他们要讨论的数学结构. 在美国大学的本科生用教科书 E. Mendelson, Introduction to mathematical logic, Chapman & Hall, 1887-2. 12 节；和研究生的教科书 J. Shoenfield, Mathematical Logic, Addison－Wesley, 1967-2. 5 节，便有严格定义的例子.

（4）再说 3. 6 节关于对顶角和平行线的命题. 我们补上证明方便大家明白我们所说的两个性质.

命题 两直线相交对顶角相等.

证明 AEB 为直线，$\angle AED + \angle BED =$ 两个直角. DEC 为直线，$\angle DEB + \angle CEB =$ 两个直角. 所以 $\angle AED = \angle CEB$.



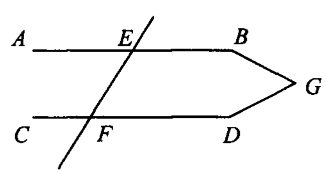
公理 2 一条有限直线可以连续地延长.

定义 23 称在同一平面内的两条直线为“平行”，如果不断延长两直线的任一侧也不在有限地方相交.

命题 三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角.（《几何原本》卷 I 命题 16）

命题 给出两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，则这两条直线平行.（《几何原本》卷 I 命题 27）

证明 设直线 EF 与两条直线 AB, CD 相交使得 $\angle AEF = \angle EFD$. 断言：AB 与 CD 平行.



如果 AB 与 CD 不平行，则按定义 23，我们可以假设把 AB, CD 延长后相交于点 G. 这样便有三角形 $\triangle EGF$，于是从假设得 $\angle AEF = \angle EFG$. 这是与命题 16 相矛盾. 证毕.

（5）在此我们不讨论近两百年欧洲学者对《几何原本》这本书的逻辑结构的修订，请看 Hilbert 的名著 Grundlagen der Geometrie, 1899. 中译本：《希尔伯特几何基础》，江泽涵，朱鼎勋译，北京大学出版社，2009；英译本：D. Hilbert, The Foundations of Geometry, translated by Leo Unger from 10th edition, The Open Court Publishing Company, 1971. 也请看：王申怀，“从欧几里得《几何原本》到希尔伯特《几何基础》”，数学通报，2010 年，49 卷 1 期；和 Hilbert and his Grundlagen der Geometrie, in J. Gray, Words out of nothing, Springer Verlag, 2010. 可以从希尔伯特的公理证出《几何原本》I 至 IV 的结果，详情见代数几何学家 R. Hartshorne, Geometry: Euclid and Beyond, Springer, 1997 的第 2 章.

我们补充五点：

一. 如果我们要执行逻辑的检查我们便需要有一个严密的公理系，这是由希尔伯特给出以代替欧几里得的公理系. 这样在希尔伯特几何基础第二章便可以考虑公理的相容性和互相独立性.

二. 要有严密的公理系才可以为机械证明编写程式. 机械证明是一个很活跃的科研领域. 我们只能够介绍几本书. 吴文俊，《数学机械化》，科学出版社，2003. Jing-Zhong Zhang, Shang-Ching Chou, Xiaoshan Gao, Machine Proofs in Geometry: World Scientific Publishing Company, 1994; Ding-Zhu Du, Frank Kwang Hwang, Computing in Euclidean Geometry, World Scientific Pub Co Inc; 1995; Francisco Botana, Pedro Quaresma, Automated Deduction in Geometry: ADG 2014, Springer 2015; HOL (Cambridge University Computer Lab).

三. 希尔伯特加入了射影几何的公理.

四. 希尔伯特的第一组公理原文称为 Axiome der Verknüpfung, 1905 年的英译为 Axioms of connection，现在译为 Axioms of incidence（见 Hartshorne, Geometry, 第 6 节）. 这和我们中译为「关联公理」吻合. 正如 Hartshorne 指出这组公

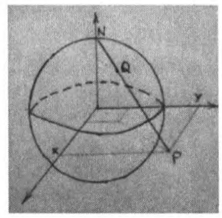
理定义一种「关联几何」(Incidence Geometry). 这种几何是组合几何学的一部份. 教科书有:B. de Bruyn, An Introduction to Incidence Geometry, Birkhauser (2016);J. Ueberberg, Foundations of incidence geometry, Springer, 2011. J. Tits 把这个关联几何发展为 BUILDING 理论 (因此 Tits 获得 2008 年 Abel 奖). 这个理论正好是把 Felix Klein 的 Erlangen program 反过来 (详细讨论见: 黎景辉, 梁志斌, Buildings and groups I, 数学季刊, 河南大学, 2019). 虽然这些几何和现代计算机各方面都会有密切关系,但在我国数学系罕见关于过去一个半世纪的几何的课程! 在教材不多的现状下值得把前面提及的 Hartshorne 和 Gray 的两本书译为中文.

五. 过去两次在美国有人用希尔伯特公理系来编写中学几何教科书,但都失败了. 基本的原因是这个系统对学生的数理逻辑的知识的要求是远超一般美国中学生的水平. 虽然欧几里得的《几何原本》的公理系统并不完备,但是我们认为一些中学生是有能力学这个系统. 过去两百年欧美所训练的科学家工程师见证了这一点.

我们再谈「具体例子」的问题. 如果你拿一本《几何原本》你就会看到例子. 如果你再拿一本《希尔伯特几何基础》作为比较, 例子更多. 若是你又再找一本关联几何学给学生说故事,则你的例子便是多姿多彩了. 数学是一门实践的科学. 学习从未学过的数学亦是一种实践. 若你把获得新知识的喜悦传给学生,那就是一堂无比快乐的数学课了.

(6) 前面提到的分数加法 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=1\frac{1}{6}$ 并不是个笑话.《九章算术》(东汉中期,不迟于公元 100 年)的"方田"章是世界上最早系统叙述了分数运算的著作, 中国是世界上使用一般分数最早的国家. 分数运算是一个非常重要的「数学结构」. 在大学里这个结构便是交换环的局部化,在代数几何里这便是层的结构,概形的构造. 在范畴学和同伦代数里分数运算这个「数学结构」便是范畴的局部化、范畴分数运算、导出范畴的构造;在几何里这便是叠和模空间的构造. 有在美国讲课的老师便会体验到,这些对中国学生是很自然的东西,对美国学生好像是从天而降的魔法. 不会分数!

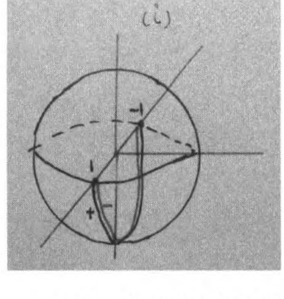
(7) 为了说明 3.5 节的积分我们补上一些图片. 复变函数论一开始告诉我们用球极平面投影把复平面＋无穷远点(∞)看成球面, 即黎曼球: 把复平面的点 P 与 N 相连, NP 与球面交点 Q, 则定义对应 $P\leftrightarrow Q$,见下图.

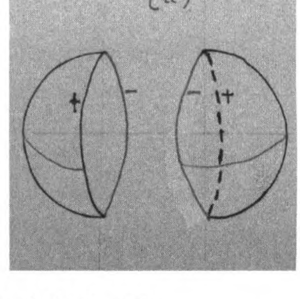


因为我们只是考虑黎曼曲面的拓扑性质,我们把黎曼球看作橡皮球,可以把它连续变形. 在复平面上平方根函数 $y=\sqrt{f(x)}$ 是双值函数,关于平方根函数的黎曼曲面的构造可看: Churchill, Brown, Complex Variables and Applications, McGraw Hill, 8th Edition, 2009, Chap 8, 99 节 Example 2, 349 页;Jones, Singerman, Complex Functions, Cambridge University Press, 1987, 4.8 节, 154 页. 我们取两份复平面或两个黎曼球便可以把平方根函数变为平常的单值函数. 在第一个积分出现的函数是

$$y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{(1+x)(1-x)},$$

这个函数的分歧点是 1, -1. 分支切割是从 -1 到 1 (见下图 (i)). 把分支切割拉开球面变为半球面. 同样处理另一个黎曼球. 如图(ii), 然后按函数 $y=\sqrt{(1-x)(1+x)}$ 的黎曼曲面的构造法, 把两个半球面粘起来左边的＋半圆粘到右边的－半圆,左边的－半圆粘到右边的＋半圆. 这样得到函数 $y=\sqrt{(1-x)(1+x)}$ 的黎曼曲面 C_0 又是一个黎曼球! 积分 (1′) 是微分形式 $\frac{dx}{y}$ 在黎曼球 C_0 上的积分.





下一步我们来看第 2 个积分 (2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3-4x-8}}.$$

这里我们要考虑复变函数 $y=\sqrt{4x^3-4x-8}$ 的黎曼曲面 S，即 S 是这个函数的定义域，这个函数在 S 上是单值解析函数.我们求根号下多项式方程的根，

$$\begin{aligned} y^2 &= 4x^3-4x-8 \\ &= 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3), \end{aligned}$$

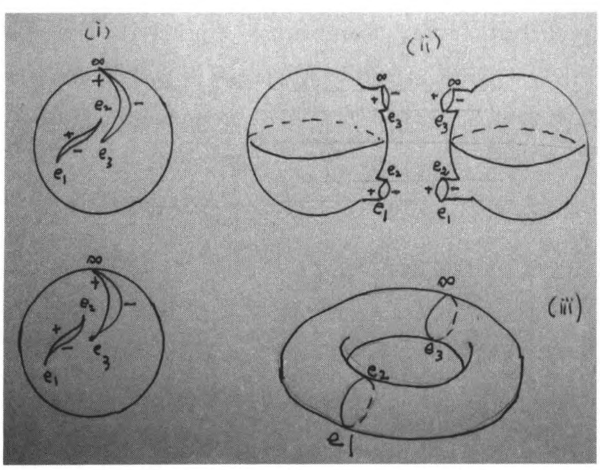
其中

$$e_1=\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{26}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{26}{27}}},$$

$$e_2=\omega\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{26}{27}}}+\omega^2\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{26}{27}}},$$

$$e_3=\omega^2\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{26}{27}}}+\omega\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{26}{27}}},$$

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$



这时我们要构造函数 $y=\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}$ 的黎曼曲面.这个函数的分歧点是 e_1,e_2,e_3,∞.分支切割是从 e_1 到 e_2，从 e_3 到 ∞（见上图(i)）.取两个黎曼球把分支切割拉开如图(i).把这两个球变形一点，像图(ii)，然后把左边粘到右边，左边的＋半圆粘到右边的－半圆，左边的－半圆粘到右边的＋半圆.再一次变形便得到图(iii)中的车轮胎，这就是函数 $y=\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}$ 的黎曼曲面 C_1.(2′)是微分形式 $\frac{dx}{y}$ 在黎曼曲面 C_1 上的积分.

所以两个积分都是同样的微分形式在曲面上的积分，这个问题的关键是这两个曲面的拓扑是不同的.也许这对一年级的本科生是太难了，我们的目的是引发同学学习更多的数学结构.也许听过这个故事，一个不愿意放弃的学生在学了更多数学后，可能有一天他在图书馆里忽然明白这回事.这样「太难」不是问题的答案，而是学习的开始.

(8)竞赛.我们的教育系统避不开考试.中学生的数学考试包括校内、高考和竞赛，竞赛题是最难的.所以我们看看竞赛题和本文的关系.按题目的性质，把我们的讨论分成两部分.

(i)几何部分.

前面已经说：欧几里得平面几何的难题并不只是计算，它们是绕着一些名题和解题技巧设计出来的.难度是在一个题里有好几个定理，而且这些定理是一层一层地叠起来.解题的时候要找到这些定理叠起来的规则和关键的实体.比如：要证明两个线段 AB 和 $A'B'$ 相等，可能关键是证明题中的图有两个全等三角形 ABC 和 $A'B'C'$；又或者图中有个平行四边形 $ABB'A'$.这可以是个很复杂的辩证过程，不过一方面《几何原本》的数学结构只是背景，不影响题目的解决，另一方面亦没有增加新的数学结构的认识.

(ii)代数部分.

这一部分的题常用大学课里的一些不需要复杂说明的材料，特别是数论、代数、组合论和微积分里的数列算法.解题的人要有很好的分析能力，把已给的材料按分类情况找出关系，经过辩证而重新组合.当然若有大学课程里适当的数学结构的知识，会提高识辨力加快题目的解决，但这不是必要的.如训练学生做大量这样的题目，是会培养学生习惯于寻求一组数据、一组方程、一组现象的结构.但不一定教会学生创造数学结构及学习复杂系统的耐力和能力.比如，做了大量整数 mod m 的计算，不一定会发现自己其实是计算环 $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ 的可逆元子群的基（$\mathbf{Z}$ 为整数环）.

我们的观察认为，在中学的数学训练比较注重数学计算以及比较少追求结构性的发现.

(9)同学问：怎样思考数学？老师问：怎样教学生思考数学？思，计虑也.《礼记曲礼》俨若思.考，核实也.《书舜典》三载考绩.古语可能没有「思考」此词，不见《词源》.按《词海》思考是指分析、综合、推理、判断等非感官知觉的认识.

教学生如何思考是教育学的基本课题，我们不在这里讨论.让我们问个简单点的问题：怎样思

（下转第17页）

161－168

[19]Hollands, R.. Educational technology: Aims and objectives in teaching mathematics[J]. Mathematics in School, 1972 (6):22－23

[21]Mann E. L. Mathematical creativity and school mathematics: indicators of mathematical creativity in middle school students [D]. Connecticut: University of Connecticut, 2005: 14

[23]王志铭，刘祥通. 一位资优生自发性解题表现之探究～以分数除法之当量除为例[J].（台湾）资优教育季刊，2007(9)：8－19

[25]Leikin, R., &Sriraman, B. (Eds.). Creativity and Giftedness: Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond. Advances in Mathematics Education Series. Switzerland: Springer, 2016

（上接第10页）

考数学题？在前一段谈竞赛题的时侯我们说了一点，按照本文的说法，如果是个计算题，如算初等函数积分，那有标准方案. 但是，找出阶不大于20的群的同构类，这便是个结构性问题，怎样去思考这个数学题？一个已知答案的题目基本上可以从所问还原出解，一个未知答案的题目就不简单了. 比如，怎样思考黎曼猜想？

念过爱因斯坦自已谈相对论，如 Einstein, Relativity : The special and general theory, Dover reprint 2010，就会知道他常用的一种思考方法：思维实验(Gedanken experiment) . 这是一种在我们思维中进行的实验，用作检验一些原则，说明一些现象和结构；学理论物理的人都知道这方法，这是值得向学生介绍的. 事实上学习数学就是一个不断深耕的思维实验. 参考 Wikipedia: Einstein's thought experiments 和文集 J. Robert, F. Mélanie, M. Letitia (eds.). Thought Experiments in Philosophy, Science and the Arts. Routledge, London 2016, ISBN－10: 0415885442.

让我们换个问题：怎样思考线性代数？在这里思考或可以解释为认识. 一般人，若是「不学」线性代数，很难想出「线性结构」. 一个听完线性空间定义的人怎样思考线性结构？实际上我们不去问这样不是数学的问题. 我们是透过习题来增加我们的认识，是透过实践来检验，在这个过程中我们思考「线性结构」的意义. 从线性空间进展为「淡中范畴」是一个实验过程，是多位数学工作者在对代数几何和表示论的线性现象的研究和观察才得出来的结构. 是经过多人修订错误才慢慢地形成现在的结构. 我们现在所知的「线性结构」是得来不易的. 在这里我们看到一个过程：学而后知，知才思新.

常听说我国中学生缺少创新思考，然而过去一百年有几个爱因斯坦、海森堡、格罗滕迪克、哥德尔(Gödel)？百分之九十的创新只不过是闻一求异. 如果我们从来不向我们的学生披露一点数学结构，又怎能叫他们创新呢？

6 结语

在中学减少重复做同样的题目和做太难的题目，在释放出来的部分时间，利用年轻人好新奇的心理，向学生介绍一些比较新的数学内容和结构. 用这些新的教材，在每次高考题中编一两题. 在中学，电脑课教过去五年的事，为什么数学课只讲五百年前的事呢？我们不是建议全面改变现行的中小学数学课程，我们只是说，给现代数学一点空间.

在大学一年级的微积分和线性代数课，减少那些机器可做的习题，引导学生开始结构性的思考，以适应未来的学习. 把释放出来的部分时间，为学生讲一些过去一百年的数学历史，介绍一些比较形式的系统，如拓扑空间，数理逻辑，集合论初步.

我们可以从工程计算看十九世纪的数学成就. 现在随着电子计算机和信息科技的快速发展，各方面数学的应用日趋结构化，如此看来二十世纪的数学好像是从十九世纪过渡到二十一世纪，从计算性过渡到结构性. 难道我们不应该为孩子作些准备，而让他们错过这个新机会吗？（续完）

致谢 感谢在我们的单位和我们访问过的单位的本科生、研究生和老师给我们的批评和建议. 感谢李克正和张英伯老师的鼓励、指导和支持.