

苏州市 2020~2021 学年第二学期期初学业质量阳光指标调研卷

高三数学

2021.2

注意事项

学生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求：

1. 本卷共 6 页，包含单项选择题（第 1 题~第 8 题）、多项选择题（第 9 题~第 12 题）、填空题（第 13 题~第 16 题）、解答题（第 17 题~第 22 题）。本卷满分 150 分，答题时间为 120 分钟。答题结束后，请将答题卡交回。
2. 答题前，请您务必将自己的姓名、调研序列号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卡的规定位置。
3. 请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答，在其他位置作答一律无效。作答必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔。请注意字体工整，笔迹清楚。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

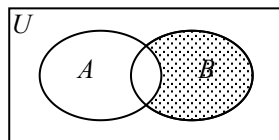
1. 如图，阴影部分所表示的集合为

A. $A \cap (\complement_U B)$

B. $B \cap (\complement_U A)$

C. $A \cup (\complement_U B)$

D. $B \cup (\complement_U A)$



(第 1 题图)

2. 已知复数 z 满足 $iz = 1 - i$ (i 为虚数单位)，则 z 在复平面内对应的点在

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $2(a_1 + a_3 + a_5) + 3(a_8 + a_{10}) = 60$ ，则 S_{11} 的值为

A. 33

B. 44

C. 55

D. 66

4. 古希腊哲学家毕达哥拉斯曾说过：“美的线型和其他一切美的形体都必须有对称形式”。在中华传统文化里，建筑、器物、书法、诗歌、对联、绘画几乎无不讲究对称之美。如清代诗人黄柏权的《茶壶回文诗》(如图)以连环诗的形式展现，20 个字绕着茶壶成一圆环，不论顺着读还是逆着读，皆成佳作。数学与生活也有许多奇妙的联系，如 2020 年 02 月 02 日 (20200202)

被称为世界完全对称日(公历年日期中数字左右完全对称的日期)。数学上把 20200202 这样的对称数叫回文数，两位数的回文数共有 9 个 (11, 22, ..., 99)，则在三位数的回文数中，出现奇数的概率为

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{4}{9}$

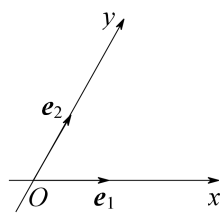
C. $\frac{5}{9}$

D. $\frac{2}{3}$



(第 4 题图)

5. 如图，在斜坐标系 xOy 中， x 轴、 y 轴相交成 60° 角， e_1, e_2 分别是与 x 轴、 y 轴正方向同向的单位向量，若向量 $\overline{OP} = xe_1 + ye_2$ ，则称有序实数对 $\langle x, y \rangle$ 为向量 \overline{OP} 的坐标，记作 $\overline{OP} = \langle x, y \rangle$. 在此斜坐标系 xOy 中，已知向量 $a = \langle 2, 3 \rangle$ ， $b = \langle -5, 2 \rangle$ ，则 a, b 夹角的大小为



(第 5 题图)

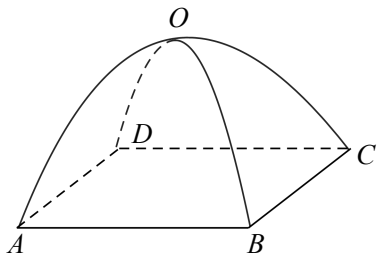
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$
 C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
6. 已知函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 分别是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数和奇函数，且 $f(0) = -4$ ， $f(x) = g(x+2)$ ，则 $g(x)$ 的解析式可以是

- A. $y = -4\sin\frac{\pi x}{4}$ B. $y = 4\sin\frac{\pi x}{2}$ C. $y = -4\cos\frac{\pi x}{4}$ D. $y = 4\cos\frac{\pi x}{2}$

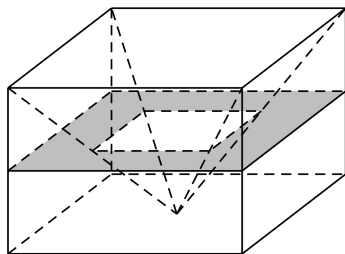
7. 已知函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ，若 α 为锐角且 $f(\frac{\alpha}{2}) = \frac{6}{5}$ ，则 $f(\alpha + \frac{\pi}{12})$ 的值为

- A. $-\frac{48}{25}$ B. $-\frac{24}{25}$ C. $\frac{24}{25}$ D. $\frac{48}{25}$

8. 我国南北朝时期的数学家祖暅在计算球的体积时，提出了一个原理（祖暅原理）：“幂势既同，则积不容异”. 这里的“幂”指水平截面的面积，“势”指高. 这句话的意思是：两个等高的几何体若在所有等高处的水平截面的面积相等，则这两个几何体体积相等. 利用祖暅原理可以将半球的体积转化为与其同底等高的圆柱和圆锥的体积之差. 图 1 是一种“四脚帐篷”的示意图，其中曲线 AOC 和 BOD 均是以 1 为半径的半圆，平面 AOC 和平面 BOD 均垂直于平面 $ABCD$ ，用任意平行于帐篷底面 $ABCD$ 的平面截帐篷，所得截面四边形均为正方形. 模仿上述半球的体积计算方法，可以构造一个与帐篷同底等高的正四棱柱，从中挖去一个倒放的同底等高的正四棱锥（如图 2），从而求得该帐篷的体积为



(第 8 题图 1)



(第 8 题图 2)

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 设 $(1+2x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ ，则满足 $a_n^2 = 2a_{n-1}a_{n+1}$ 的正整数 n 的值可能为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. 已知 $2^x = 3, 3^y = 4$ ，则

- A. $x < \frac{3}{2}$ B. $xy = 2$ C. $x > y$ D. $x + y > 2\sqrt{2}$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ 的右焦点为 F ，两条直线 $\sqrt{2}x + 2y = t_1, \sqrt{2}x + 2y = t_2$ 与 C 的交点分别为 A, B ，则可以作为 $|FA| = |FB|$ 的充分条件的是

- A. $t_1 = 1, t_2 = 8$ B. $t_1 = 2, t_2 = 3$ C. $t_1 = 2, t_2 = 4$ D. $t_1 = 1, t_2 = 4$

12. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AA_1 = AB = 2AD = 2$ ， E, F 分别为 BB_1, D_1C_1 的中点，则

- A. $EF \perp EC$
 B. $BD \parallel$ 平面 AEF
 C. 三棱锥 $C_1 - CEF$ 外接球的表面积为 5π
 D. 平面 A_1BCD_1 被三棱锥 $C_1 - CEF$ 外接球截得的截面圆面积为 $\frac{9\pi}{8}$

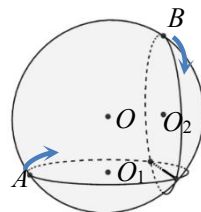
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(3, \sigma^2)$ ，且 $\frac{P(\xi < 1)}{P(\xi < 5)} = \frac{1}{9}$ ，则 $P(3 < \xi < 5) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

14. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} = 1 (a > 0)$ 的左、右焦点，过 F_2 作 x 轴的垂线与 C 交于 A, B 两点，若 $\triangle ABF_1$ 为正三角形，则 a 的值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

15. 已知函数 $f(x) = |x - 1| + |x + 1| - \frac{1}{2}|x|$ ，若函数 $g(x) = f(x) - b$ 恰有四个零点，则实数 b 的取值范围是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

16. 如图，已知球 O 的半径为 $\sqrt{5}$ ，圆 O_1, O_2 为球 O 的两个半径均为 2 的截面圆，圆面 O 、圆面 O_1 、圆面 O_2 两两垂直，点 A, B 分别为圆 O 与圆 O_1, O_2 的交点， P, Q 两点分别从 A, B 同时出发，按箭头方向沿圆周 O_1, O_2 以每秒 $\frac{\pi}{6}$ 弧度的角速度运动，直到两点回到起始位置时停止运动，则其运动过程中线段 PQ 长度的最大值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ ；研究发现线段 PQ 长度最大的时刻有两个，则这两个时刻的时间差为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 秒。（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）



(第 16 题图)

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $c = 3, \sin(A + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}b}{2c}$ ，

$$\sin A + \sin B = 2\sqrt{6} \sin A \sin B.$$

(1) 求 $\triangle ABC$ 外接圆的直径；

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积。



18. (本小题满分 12 分)

随着视频传输和移动通信技术的日益成熟、以及新冠疫情的推动，直播+电商的模式正在全球范围内掀起热潮。目前，国际上 Amazon、Rakuten 等电商平台和以 Facebook 为代表的社交类平台都纷纷上线了直播电商业务；在国内，淘宝、京东、抖音、拼多多、苏宁等众多平台都已成为该赛道内的玩家。根据中研产业研究院《2020—2025 年中国直播电商行业市场深度分析及投资战略咨询研究报告》显示，2020 年上半年，“直播经济”业态主要岗位的人才达到 2019 年同期的 2.4 倍；2020 年“6·18”期间，带货主播和直播运营两大岗位高达去年同期的 11.6 倍。针对这一市场现象，为了加强监管，相关管理部门推出了针对电商的商品和服务的评价体系。现从评价系统中选出 200 次成功交易，并对其评价进行统计，对商品的好评率为 0.6，对服务的好评率为 0.75，其中对商品和服务都做出好评的交易为 80 次。

(1) 请完成关于商品和服务评价的 2×2 列联表，并判断能否在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下，认为商品好评与服务好评有关？

	对服务好评	对服务不满意	合计
对商品好评	80		
对商品不满意		10	
合计			200

(2) 若将频率视为概率，某人在该购物平台上进行的 3 次购物中，设对商品和服务全为好评的次数为随机变量 X ，求对商品和服务全为好评的次数 X 的分布列和数学期望。

附临界值表：

$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

K^2 的观测值： $k = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ (其中 $n = a + b + c + d$)。

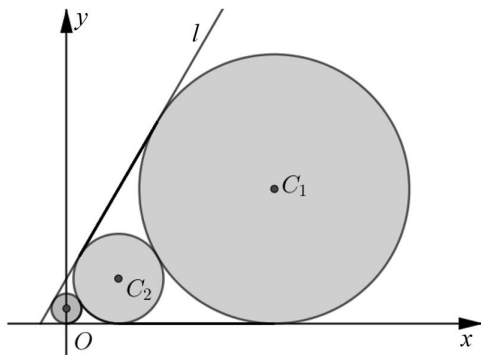


19. (本小题满分 12 分)

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知 n 个圆 C_1, C_2, \dots, C_n 与 x 轴和直线 $l: y = \sqrt{3}(x+1)$ 均相切，且任意相邻两圆外切，其中圆 $C_i: (x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 = r_i^2$ ($1 \leq i \leq n, i \in \mathbf{N}^*, -1 < a_n < \dots < a_2 < a_1 = 8, b_i > 0, r_i > 0$)。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 n 个圆的面积之和为 S ，求证： $S < \frac{243}{8}\pi$ 。



(第 19 题图)

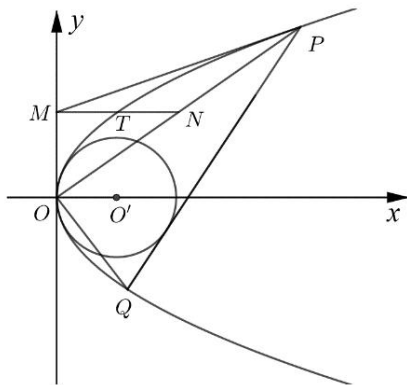


20. (本小题满分 12 分)

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，过原点的直线 $l: y = k_1x$ ($k_1 > 0$) 交抛物线 $C: y^2 = 2x$ 于点 P (异于原点 O)，抛物线 C 上点 P 处的切线交 y 轴于点 M ，设线段 OP 的中点为 N ，连结线段 MN 交 C 于点 T 。

(1) 求 $\frac{|TM|}{|MN|}$ 的值；

(2) 过点 P 作圆 $O': (x-1)^2 + y^2 = 1$ 的切线交 C 于另一点 Q ，设直线 OQ 的斜率为 k_2 ，证明： $|k_1 - k_2|$ 为定值。



(第 20 题图)

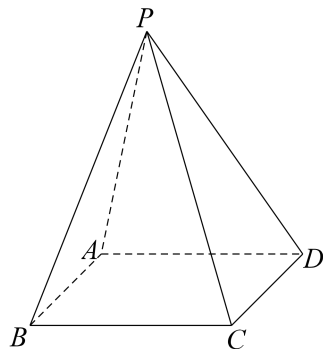


21. (本小题满分 12 分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， $PA=PB=3$.

(1) 证明： $\angle PAD = \angle PBC$ ；

(2) 当直线 PA 与平面 PCD 所成角的正弦值最大时，求此时二面角 $P-AB-C$ 的大小.



(第 21 题图)



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = xe^{ax} - \ln x$ ，其中 e 是自然对数的底数， $a > 0$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 $2e - 1$ ，求 a 的值；

(2) 对于给定的常数 a ，若 $f(x) \geq bx + 1$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，求证： $b \leq a$.

