

直线与椭圆的位置关系

知识点：

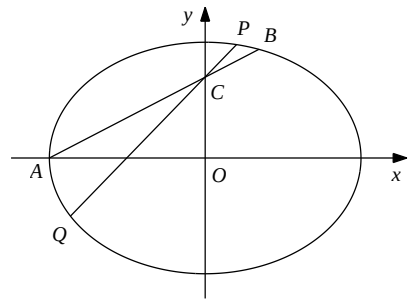
1. 弦长问题
2. 椭圆中面积问题
3. 椭圆中定点定值问题

例题讲解：

例1. 如图，点 $A(-a, 0)$, $B(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的两点，直线 AB 与 y 轴交于点 $C(0, 1)$ 。

(1) 求椭圆的方程；

(2) 过点 C 任意作一条直线 PQ 与椭圆相交于 P, Q ，求 PQ 的取值范围。



例2. 在平面直角坐标系中， $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ ，设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别与 AC, BC, AB 相切于点 P, Q, R ，已知 $|CP| = 1$ ，记动点 C 的轨迹为曲线 E 。

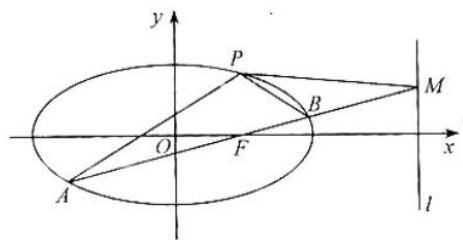
(1) 求曲线 E 的方程；

(2) 过 $G(2, 0)$ 的直线与 y 轴正半轴交于点 S ，与曲线 E 交于点 H ， $HA \perp x$ 轴，过 S 的另一直线与曲线 E 交于 M, N 两点，若 $S_{\triangle SMG} = 6S_{\triangle SHN}$ ，求直线 MN 的方程。

例 3. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P(1, \frac{3}{2})$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x = 4$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦(不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M , 记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 . 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$. ? 若存在求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.



例 4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点, 且椭圆经过点 $A(2, 0)$ 和点 $(1, 3e)$, 其中 e 为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过点 A 的直线 l 交椭圆于另一点 B , 点 M 在直线 l 上, 且 $OM = MA$. 若 $MF_1 \perp BF_2$, 求直线 l 的斜率.

归纳小结：

巩固练习：

1. 已知椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ ，直线 $y = x + m$ 。

(1) 当直线与椭圆有公共点时，求实数 m 的取值范围。

(2) 求被椭圆截得的最长弦所在的直线方程。

2. 在平面直角坐标系 xOy 中， A ， B 两点的坐标分别是 $(-2, 0)$ ， $(2, 0)$ ，直线 AQ ， BQ 相交于点 Q ，且它们的斜率之积是 $-\frac{3}{4}$ 。

(1) 求点 Q 的轨迹 C 的方程；

(2) 过点 $P(-4, 0)$ 的直线 l 与轨迹 C 相交于 M ， N 两点，且 $4S_{\triangle PAM} = S_{\triangle PON}$ 。

①求直线 l 的方程；

②求直线 l 被轨迹 C 截得的弦长.

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 , A, B 分别为右顶点和上顶点, 若 $\angle BF_2O = 30^\circ$, 且 $\triangle ABF_2$ 的面积为 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) P 是椭圆 C 上除顶点外的任意一点, 过点 P 作斜率为 k 的直线 l , 使得 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点, 若直线 PF_1, PF_2 的斜率存在且分别为 k_1, k_2 , 试证明: $\frac{1}{k \cdot k_1} + \frac{1}{k \cdot k_2}$ 为定值, 并求出这个定值.

4. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 。过椭圆 C 的左顶点 A 作直线交椭圆 C 于另一点 P ，交直线 $l: x = m (m > a)$ 于点 M 。已知点 $B(1, 0)$ ，直线 PB 交 l 于点 N 。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 若 MB 是线段 PN 的垂直平分线，求实数 m 的值。

