



高三第三次质量监测 数 学

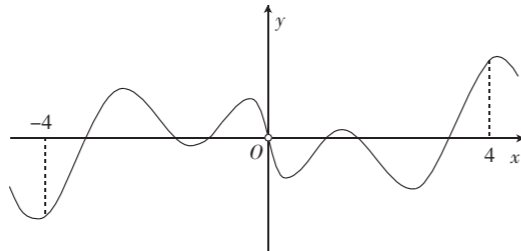
考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第 I 卷

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(2, -1)$, 则 $\frac{2z}{z-1} =$
 A. $3+i$ B. $1-3i$ C. $1-i$ D. $2-i$
2. 已知集合 $P = \{x | x^2 - 5x - 6 \leq 0\}$, $Q = \{x | 3^{-x} \leq 1\}$, 则 $P \cap Q =$
 A. $\{x | -1 \leq x \leq 0\}$ B. $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ C. $\{x | 0 \leq x \leq 6\}$ D. $\{x | -6 \leq x \leq 0\}$
3. 已知平面 α 和两条不同的直线 m, n , 则“直线 m, n 与平面 α 所成角相等”是“ $m \parallel n$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 2020 年 11 月 24 日 4 时 30 分,我国在文昌航天发射场用长征五号运载火箭成功发射嫦娥五号,12 月 17 日凌晨,嫦娥五号返回器携带月球样品在内蒙古四子王旗预定区域安全着陆,“绕、落、回”三步探月规划完美收官,这为我国未来月球与行星探测奠定了坚实基础。已知在不考虑空气阻力和地球引力的理想状态下,可以用公式 $v = v_0 \cdot \ln \frac{M}{m}$ 计算火箭的最大速度 v (m/s),其中 v_0 (m/s) 是喷流相对速度, m (kg) 是火箭(除推进剂外)的质量, M (kg) 是推进剂与火箭质量的总和, $\frac{M}{m}$ 称为“总质比”。若 A 型火箭的喷流相对速度为 1000 m/s, 当总质比为 500 时, A 型火箭的最大速度约为 ($\lg e \approx 0.434, \lg 2 \approx 0.301$)
 A. 4890 m/s B. 5790 m/s C. 6219 m/s D. 6825 m/s
5. 已知某函数的部分图象如图所示, 则该图象所对应的函数可能是

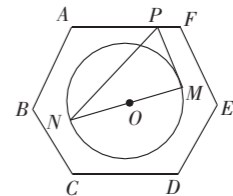


- A. $f(x) = \sin 2x \cdot \ln|x|$
 - B. $f(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{x}$
 - C. $f(x) = \frac{\sin 2x}{e^{|x|} - 1}$
 - D. $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \ln|x|$
6. 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $|AF| + |BF| = 3|AF| \cdot |BF|$, 则 $p =$
 A. 2 B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸,是中国古老的传统民间艺术之一。每年新春佳节,我国许多地区的人们都有贴窗花的习俗,以此达到装点环境、渲染气氛的目的,并寄托着辞旧迎新、接福纳祥的愿望。图一是一张由卷曲纹和回纹构成的正六边形剪纸窗花,已知图二中正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 4, 圆 O 的圆心为正六边形的中心, 半径为 2, 若点 P 在正六边形的边上运动, MN 为圆 O 的直径, 则 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的取值范围是

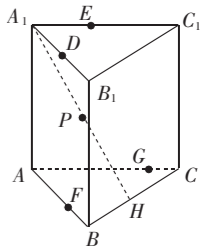


图一



图二

- A. $[6, 12]$
 - B. $[6, 16]$
 - C. $[8, 12]$
 - D. $[8, 16]$
8. 在一次“概率”相关的研究性活动中,老师在每个箱子中装了 10 个小球,其中 9 个是白球,1 个是黑球,用两种方法让同学们来摸球。方法一:在 20 箱中各任意摸出一个小球;方法二:在 10 箱中各任意摸出两个小球。将方法一、二至少能摸出一个黑球的概率分别记为 p_1 和 p_2 , 则
 A. $p_1 = p_2$ B. $p_1 < p_2$
 C. $p_1 > p_2$ D. 以上三种情况都有可能
 9. 在 $(3x - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中,各项系数和与二项式系数和之和为 128, 则
 A. 二项式系数和为 64 B. 各项系数和为 64
 C. 常数项为 -135 D. 常数项为 135
 10. 将函数 $f(x) = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再将所得图象上所有点的横坐标扩大为原来的 2 倍,得到函数 $g(x)$ 的图象,则下列说法正确的有
 A. 函数 $g(x)$ 的最小正周期为 2π
 B. 函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $[4k\pi - \frac{4\pi}{3}, 4k\pi + \frac{2\pi}{3}] (k \in \mathbb{Z})$
 C. 直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 是函数 $g(x)$ 图象的一条对称轴
 D. 函数 $g(x)$ 图象的一个对称中心为点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$
 11. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $2a + b = ab$, 则
 A. $ab \geq 8$ B. $a + b \leq 3 + 2\sqrt{2}$
 C. $2^b > 4$ D. $\log_2(a-1) \cdot \log_2(b-2) \leq \frac{1}{4}$
 12. 如图,已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 3, D, E, F, G 分别在棱 A_1B_1, A_1C_1, AB, AC 上, 且 $A_1D = A_1E = BF = CG, H$ 是 BC 的中点, P 是 A_1H 的中点, 则
 A. $DE \parallel$ 平面 PFH
 B. 若 M, N 分别是平面 A_1ABB_1 和 A_1ACC_1 内的动点, 则 $\triangle MNP$ 周长的最小值为 $\frac{9}{4}$
 C. 若 $BF = \frac{1}{3}AB$, 过 P, F, G 三点的平面截三棱柱所得截面的面积为 $\frac{3\sqrt{39}}{4}$
 D. 过点 A 且与直线 AA_1 和 BC 所成的角都为 45° 的直线有 2 条

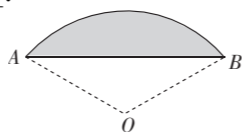


第 II 卷

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $2a_7 = a_9 + 4$, 则 $S_9 =$ ▲.

14. 《九章算术》是中国古代的数学名著, 其中《方田》一章给出了弧田(由圆弧和其所对弦所围成)面积的计算公式: 弧田面积 $= \frac{1}{2}(\text{弦} \times \text{矢} + \text{矢}^2)$. 公式中



“弦”指圆弧所对弦长, “矢”等于圆弧的最高点到弦的距离. 如图, 弧田是由

圆弧 \widehat{AB} 和其所对弦 AB 围成的图形, 若弧田的弧 \widehat{AB} 长为 $\frac{8\pi}{3}$, 弧所在的圆的半径为 4, 则利用九章

算术中的弧田面积公式计算出来的面积与实际面积之差为 ▲.

15. 已知函数 $f(x) = e^x - mx^3$, 曲线 $y = f(x)$ 在不同的三点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ 处的切线均平行于 x 轴, 则 m 的取值范围是 ▲.

16. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, P 为右支上任意一点, 若

$\frac{|PF_1|^2}{|PF_2|^2 + 4a^2}$ 的最大值为 2, 则双曲线 C 离心率的取值范围是 ▲.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在①数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1} = 2b_n + 1, b_2 = 3$, ②数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 满足 $T_n = 2^{n+1} - n - 2$, ③数列 $\{b_n + 1\}$ 是等比数列, $b_3 = 7, b_6 = 63$ 这三个条件中任选一个补充在下面的问题中, 并加以解答.

问题: 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2, ▲, $a_{n+1} - a_n = b_n$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

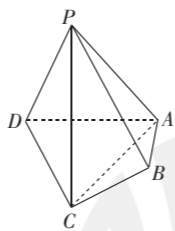
注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD, AB \perp AD, AB = \frac{\sqrt{3}}{2}, \triangle ACD$ 是边长为 2 的等边三角形, $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形.

(1) 证明: 平面 $PDC \perp$ 平面 PAB .

(2) 求二面角 $C-PB-A$ 的余弦值.



19. (12 分)

2021 年, “十四五”开局, 全面建设社会主义现代化国家新征程由此开启, 这一年, 中国共产党将迎来建党 100 周年. 某企业开展“学党史, 颂党恩, 跟党走”的知识问答活动, 该企业收集了参与此次知识问答活动的员工得分情况, 得到如下频率分布表:

得分	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100)
频率	0.04	0.10	a	b	0.20	0.12

其中样本的平均数是 73.6. (假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替)

(1) 求 a, b 的值;

(2) 根据此次知识问答活动的得分, 评出四个等级, 并根据等级给予如下的奖励:

得分	(0, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 100)
评定等级	不合格	合格	良好	优秀
抽奖次数	0	1	2	4

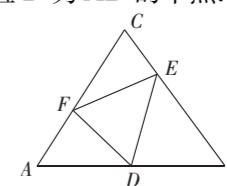
每次抽奖的中奖率均为 $\frac{1}{2}$, 每次中奖的奖金都为 100 元, 求参与此次知识问答活动的某员工所获奖金 X 的数学期望.

20. (12 分)

如图, 正三角形 ABC 的边长为 4, D, E, F 分别在边 AB, BC 和 CA 上, 且 D 为 AB 的中点.

(1) 若 $DF \perp AC, DE \parallel AC$, 求 EF ;

(2) 若 C, F, D, E 四点共圆, 求四边形 $CFDE$ 的面积.



21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 8, 且点 $M(\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ 在 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, 且线段 AB 被直线 OM 平分, 求 $\triangle AOB$ (O 为坐标原点) 面积的最大值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = (9+a)\ln x - ax^2 + ax$ 有两个极值点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 求 $f(x)$ 极小值的取值范围.