

江苏省仪征中学 2020 届高三年级第一学期 B 版午间 “3+1” (41)
2019 年 12 月 12

班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____ 评价 _____

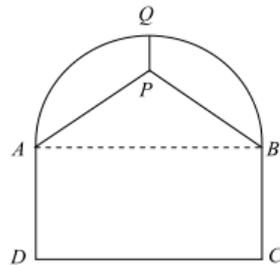
请将填空题答案填在横线上，并将每个题目的解答过程写在题目下方。

1. 若 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, $\cos \alpha = -\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\tan \beta = -\frac{1}{3}$, 则 $\alpha + 2\beta =$ _____.

2. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AC=1$, $BC=3$. 若 O 是该三角形内的一点, 满足 $(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{CA} - \vec{CB}) = 0$, 则 $\vec{OC} \cdot \vec{AB} =$ _____.

3. 已知 $\sin 2\alpha - 2 = 2\cos 2\alpha$, 则 $\sin^2 \alpha + \sin 2\alpha =$ _____.

4. 如图, 某隧道的剖面图是由半圆及矩形 $ABCD$ 组成, 交通部门拟在隧道顶部安装通风设备 (视作点 P), 为了固定该设备, 计划除从隧道最高点 Q 处使用钢管垂直向下吊装以外, 再在两侧自 A, B 两点分别使用钢管支撑. 已知道路宽 $AB = 8\text{cm}$, 设备要求安装在半圆内部, 所使用的钢管总长度为 L .



1. $\frac{11\pi}{4}$; 2. 4; 3. 1 或 $\frac{8}{5}$;

4. (1) 延长 QP 交 AB 于点 E , 则 $QE \perp AB$, 且 E 为 AB 的中点,

所以 $EA = EB = EQ = \frac{1}{2}AB = 4$, 由对称性可知, $PA = PB$.

①若 $PQ = x$, 则 $0 < x < 4$, $EP = 4 - x$,

在 $Rt\triangle PAE$ 中, $PA = \sqrt{PE^2 + AE^2} = \sqrt{(4-x)^2 + 16}$,

所以 $L = PQ + 2PA = x + 2\sqrt{(4-x)^2 + 16}$ ($0 < x < 4$),

②若 $\angle PAB = \theta$, 则 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 在 $Rt\triangle PAE$ 中, $PA = \frac{AE}{\cos \theta} = \frac{4}{\cos \theta}$,

$PE = AE \tan \theta = 4 \tan \theta$, 所以 $PQ = QE - PE = 4 - 4 \tan \theta$,

所以 $L = PQ + 2PA = 4 - 4 \tan \theta + 2 \times \frac{4}{\cos \theta} = 4 + 4 \times \frac{2 - \sin \theta}{\cos \theta}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$).

(2) 选取②中的函数关系式, $L = 4 + 4 \times \frac{2 - \sin \theta}{\cos \theta}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$),

记 $f(\theta) = \frac{2 - \sin \theta}{\cos \theta}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$),

则由 $f'(\theta) = \frac{2 \sin \theta - 1}{\cos^2 \theta} = 0$ 及 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 可得, $\theta = \frac{\pi}{6}$,

当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{6})$ 时 $f'(\theta) < 0$, 此时 $f(\theta)$ 单调递减,

当 $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ 时 $f'(\theta) > 0$, 此时 $f(\theta)$ 单调递增,

所以当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(\theta)$ 取得最小值,

从而钢管总长度为 L 取得最小值, 即所用的钢管材料最省.