

多元最值问题

Content :

基本不等式是 C 级要求，是高中数学的重要知识，高考对基本不等式的考查，主要以多元最值为背景的题型进行考查。等价代换或转换是解题的关键。

典例导引：

一、前测回顾

方法梳理

1. 已知 $x+y=1$, $x>0$, $y>0$, 则 $\frac{1}{2x} + \frac{x}{y+1}$ 的最小值为_____.

2. 已知 $x+2y=xy$, $x>0$, $y>0$, 则 $x+y$ 的最小值为_____.

3. 已知 $x^2+y^2=1$, $x>0$, $y>0$, 则 $x+2y$ 的最大值为_____.

4. 已知 $x^2+xy=1$, 则 x^2+y^2 的最小值为_____.

二、方法使用

1. 已知正数 x, y 满足 $2xy = \frac{2x-y}{2x+3y}$, 那么 y 的最大值为_____.
2. 若正实数 x, y 满足 $(2xy-1)^2 = (5y+2)(y-2)$, 则 $x + \frac{1}{2y}$ 的最大值为_____.
3. 若实数 x, y 满足 $2x^2 + xy - y^2 = 1$, 则 $\frac{x-2y}{5x^2-2xy+2y^2}$ 的最大值为_____.
4. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 满足 $2 \leq y \leq 4-x, x \geq 1$, 则 $\frac{x^2+y^2+2x-2y+2}{xy-x+y-1}$ 的最大值为_____.

三、实战演练

1. 二次函数 $f(x) = ax^2 + 2x + c$ 的值域为 $(-\infty, 0]$ ，那么 $\frac{c}{a^2+1} + \frac{a}{c^2+1}$ 的最大值是_____。

2. 若不等式 $k\sin^2 B + \sin A \sin C > 19\sin B \sin C$ 对任意 $\triangle ABC$ 都成立，则实数 k 的最小值为_____。

四、巩固提升：

1. 已知正数 a, b 满足 $a+b=1$ ，则 $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+2}$ 的最大值为_____。

2. 已知正实数 a, b 满足 $a+2b=1$ ，则 $(1+\frac{1}{a})(2+\frac{1}{b})$ 的最小值为_____。

3. 正数 a, b 满足 $a+b=5$ ，则 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$ 的最小值为_____。

4. 设实数 x, y 满足 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ，则 $3x^2 - 2xy$ 的最小值是_____。

5. 若实数 x, y 满足 $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x^2y^2 = 4$, 则当 $x + 2y$ 取得最大值时, $\frac{x}{y}$ 的值为_____.

6. 若正实数 a, b, c 满足 $ab = a + 2b$, $abc = a + 2b + c$, 则 c 的最大值为_____.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $a\cos B - b\cos A = \frac{c}{2}$, 则 $\frac{a\cos A + b\cos B}{a\cos B}$ 的最小值为_____.

8. 在斜 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \tan C = 0$, 则 $\tan C$ 的最大值是_____.