

# 关于中学数学建模教与学的思考

王颖喆

(北京师范大学数学科学学院 数学与复杂系统教育部重点实验室 100875)

## 1 引言

数学建模是用数学方法解决实际问题的过程。《普通高中数学课程标准(2017版)》<sup>[1]</sup>(下文简称新课程标准)指出:“通过高中数学课程的学习,学生需要培养和发展的数学核心素养包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等几个方面。”其中数学模型活动“是对现实问题进行数学抽象,用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的过程。模型思想的建立是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径。”在新的课程标准中,数学建模已经成为高中数学课程必修的主要内容之一,数学建模与数学探究活动与函数、几何与代数、概率与统计共同构成高中数学课程的四条主线,贯穿必修、选择性必修和选修课程。

作为新课程标准中的必修内容,数学建模教学中包含哪些具体内容?在教与学的过程中都有哪些注意事项呢?下面就针对以下几个问题做详细的论述:数学建模与解数学应用题的区别,数学建模的具体内容和过程,教师教学过程中应该注意什么。

## 2 数学建模与解数学应用题的区别

对数学建模普遍存在的误解是认为数学建模过程就是求解一个数学应用题的过程,这显然是错误的。数学建模是用数学方法解决实际问题的过程,是一个非常复杂的活动,这里有两个要素,一个是“实际问题”,一个是“用数学”,分别对应的是研究对象和解决手段,数学建模活动与解应用题在研究对象和解决手段这两个方面都有天壤之别。

首先,问题提出的方式不一样。数学建模研究的对象是基于现实提出的较为庞大、复杂的实际问题,问题的提出和叙述往往是原始、粗糙、不规

范的;而数学应用题要简单很多,题干叙述严谨,条件确定,数据清楚,目标明确。

其次,对目标进行量化的复杂度不一样。数学建模研究的问题,其目标的表达往往比较抽象笼统,需要进一步量化。比如要求收益的“均衡性”,足球比赛赛程安排的“公平性”,某方案的“可行性”,或者给出最优设计方案,设计合理的运营方式,等等。这些问题的目标比较复杂,往往不是一个数值性结果就能解释清楚的,需要量化为数学表达式。数学应用题目标非常明确,不需要进一步量化。比如求撞击力度,求速度、位移等,又比如高考题中的估计维纳斯的身高,求金字塔侧面三角形底边的高与底面正方形边长的比值,天坛的圜丘坛共有多少块扇形石板,等等,都是非常明确的数值型目标,不需要进一步量化。

再次,问题的已知条件清晰度不一样。数学建模需要解决的实际问题往往只有一个问题背景,没有特定的已知条件,建模者需要根据情况自己提出假设,简化或者约束问题条件。比如考虑出租车司机收益问题时,要不要区分早晚高峰和闲时的情形?高温防护服设计的问题中要不要考虑对流和热辐射?研究传染病传播风险的时候是否考虑潜伏期的传染性?由于实际情况的复杂性,导致我们必须提出必要的、合理的假设,才可以用恰当的数学方法解决这个问题。也就是从问题的合理简化出发,达到有效解决问题的目的。从假设的提出到假设的检验,构成数学建模的一个基本骨架,这正是数学建模的特征之一。而数学应用题中已知条件是确定不可变的,不需要提出假设,也不能提出额外的假设,不能添加额外的条件。

最后,“用数学”的难度不一样。数学建模的核心过程是模型建立与计算,这里涉及到的数学知识会更深一些,逻辑结构会更复杂一些。整个建模

及模型计算的过程是一个严谨的量化和推导过程,需要严密的逻辑,即便不需要更深更难的数学技巧,也需要建模者有较强的逻辑思维能力.既要有全局观念,又要具备细节处理技巧;既依赖于建模者对实际问题的深刻理解,又要有“用数学”于实际的应用能力;既要知道如何解决问题,又要知道如何将所得结果应用于解释实际.所以数学建模对应用者的综合能力要求更高、更全面.而且数学建模是没有标准方法和标准答案的,合理的方法和结论就是好的模型.对数学模型来说,没有最好,只有更好.而数学应用题本质上还是一个数学题,只是披着实际背景的外衣,有一致正确的方法,有唯一正确的答案.

总之,数学建模与解数学应用题有本质区别,我们不能用解数学应用题的眼光和方法对待数学建模,特别是中学老师在数学建模教学的过程中,应该注意区分案例的特征,不要拿应用题充当建模案例,这样体现不出数学建模的本质特征,无法培养学生的模型思想,不符合新课程标准的基本要求.

### 3 数学建模活动的具体过程

从数学建模与数学应用题的区别可知,数学建模是从“实际问题”到“用数学”的一个复杂的综合性过程,从问题的叙述到目标的量化,从假设的提出到模型的建立,数学建模的每一步都非常重要,缺一不可.新课程标准指出:“数学建模过程包括:在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题,分析问题、建立模型,确定参数、计算求解,检验结果、改进模型,最终解决实际问题.”下面具体讨论数学建模活动的几个关键步骤.

(1)发现问题,提出问题.数学建模解决的实际问题可以是高科技背景的问题,比如GPS定位,心脏手术血流仿真,图像处理和识别,语音识别,机器翻译,复合材料设计……可以说高科技本身就是数学技术.当然数学建模也可以解决我们身边的一些不起眼的小问题,比如怎么打水漂才能使石块弹跳次数最多?汽车为什么可以在很窄的路面上掉头?明天的降水概率是60%,你要不要带伞?杯子里的水很烫,只有一些冰块,怎么做能尽快喝到水?只要用心观察,身边的很多小事其实都可以从数学的视角提出问题,然后用数学建模的方法解决.提出问题这个过程要求学生既

要有敏锐的观察力,又要有一定的数学基础和数学素养.要鼓励并锻炼学生有意识地去发现生活中的数学,不仅可以培养学生的观察力和想象力,还可以提升学习数学的兴趣.

(2)分析问题.在分析问题的过程中,对问题进行深入的剖析,是解决问题的敲门砖,是至关重要的一步.这个过程是学生尝试进行科研活动的出发点,必须按一定的逻辑和顺序进行,这样学生在遇到陌生的问题和领域时,就有章可循,有法可依,就能一步步揭开问题的本质.

分析问题的第一步,量化目标,明确问题让我们求的是什么量,确立问题解决的方向.比如“杯中的水很烫,只有一些冰块,怎么做能尽快喝到水?”这个问题的目标是“尽快喝到水”,需要把它量化为水温降到正常可饮用温度的“时间长度”,比如可以记为字母“ $T$ ”;求什么呢?求的实际上是方案,就是冰块与热水的混合方案,这个方案可以量化为冰块加入热水的时刻“ $t$ ”.这样问题就变成了:求 $t$ ,使得 $T$ 最小.这个例子寻找目标、量化目标的过程比较简单,很多时候我们要解决的实际问题更为复杂,只要遵循这样一个量化的原则,就能找到目标,找到基本的大方向.

分析问题第二步,分析影响因素,提出恰当的假设.当我们明确目标以后,就需要考虑什么因素影响了我们的目标,影响了我们要求取的这个量,哪些因素是极其重要的不可忽略的,哪些因素是可以简化的.比如还是上面这个喝水的问题,什么因素影响了热水的降温时间呢?环境温度?热水的量?冰块的量?杯子的材质?等等.可以充分地展开想象,尽可能列出所有可能的因素,然后再讨论这些因素的轻与重,得到影响目标的其他变量和参数.在这个基础上就可以提出假设,规范和简化问题.比如可以通过假设限定盛装热水的杯子是单层玻璃杯,盛装冰块的容器是一个保温桶;假设室内温度恒定为 $25^{\circ}\text{C}$ ,适宜的饮用水温度为 $45^{\circ}\text{C}$ ,等等.当然还有很多其他需要提出的假设条件,此处不再一一赘述.

分析问题第三步,文献阅读与学习.由于实际问题的复杂性,绝大部分情况需要查找文献、阅读文献,学习借鉴文献中对类似问题的处理方法和技巧,这一步是缺一不可的.但要注意不能被文献牵着鼻子走,要结合实际问题,以解决问题为目

的,合理准确的借鉴文献中的方法,而不是以展示某个模型或者方法为目的,全盘照抄文献,为使用文献中的方法硬性修改问题的条件,或者提出不合理的假设.

分析问题第四步,模型选择,寻找达到目标的路径.目标和影响因素分析清楚以后,就需要确定具体选择建立怎样的模型,这一步仅仅是明确需要建立的模型类型和大概方向.数学模型按所使用的数学工具分类,有初等模型、代数模型、几何模型、组合模型、图论模型、微分方程模型、差分方程模型、仿真模型、统计模型、运筹模型等不同的类别;按建模目标分类,有描述模型、分析模型、预测模型、优化模型、控制模型等等;按应用领域分类,有物理模型、生物化学模型、医学模型、生态模型、经济管理模型等.大部分情况下,我们建立的模型都是综合性的,比如说是用微分方程刻画的物理模型,或者利用仿真进行计算的优化模型.如果需要用到一些学生没有学过的数学知识,需要学生积极的进行学习.所以说数学建模活动可以很好的培养学生的学习能力,同时也可以加深学生对所学数学基础知识的理解和认识.

(3)建立模型以及模型求解.当我们在问题分析的时候明确了解决问题的基本路径,应该建立怎样的模型以及该模型的具体算法其实就已经明晰了.接下来就是具体的模型建立、参数估计和模型计算的过程,参数来自于我们在问题分析第二步所做的影响因素的分析.参数估计有的时候是困难的,也有一定的技巧和方法,教学中不需要讲授高难度的方法,重点是强调参数估计的重要性,培养学生做参数估计的意识.参数取值确定下来,才能真正进入对目标的计算,不同的模型有不同的算法,这部分内容非常繁杂,这里就不再赘述了.

(4)模型检验与改进.针对一个复杂的实际问题,实际上解决的方案不止一个,数学建模解决的问题是没有标准方法和标准答案的,那么我们的模型和结果是否合理?是否可以比较好的解决这个问题?这需要进行检验.模型检验的方法有多种,需要具体问题选择具体的检验方法,其中一个比较普遍的方法是对参数做灵敏度分析,也就是分析参数的变化对模型结果的影响,从而推断模型的适用情况和范围.

同一个问题可以有不同的解决方案,数学模型没有好坏之分,只有合理和不合理.对一个搭建好的模型,总是存在改进空间的,所以可以说“没有最好,只有更好”.应该鼓励学生逐步改进模型,这也会让我们对问题的认识更深刻,对模型的理解更透彻.

#### 4 中学数学建模教学应该注意的几个问题

数学建模的教学应该体现其主要特点,以真实的实际问题为教学案例,按照一般的建模步骤,引导学生逐步体会学习用数学解决实际问题的过程.这里需要注意以下几个问题:

一是案例选择很重要,最好是学生们身边常见的现象,从中转化为数学建模问题,这样的问题也可以激发学生的学习兴趣.

二是解决问题所用的数学方法不要过于艰深,不能超过大部分学生的认知水平,否则会破坏学生学习的积极性.

三是案例讲解的时候不要把重点放在数学知识的解析上,应该以数学建模过程作为重点,这个过程是一个综合的连贯的逻辑过程,模型本身和模型计算只是其中一部分,不要以偏概全.实际上对问题的理解和分析尤为重要,不同的问题建立的模型不一样,但是分析问题的技巧都是一样的,这个技巧需要多加训练,这才是解决问题的入门之路.

四是不能把解数学应用题当成数学建模过程,如前所述,数学应用题远没有数学建模活动的复杂性和综合性,所以教学中不能混淆.

总之,高中数学建模教学应该基于高中学生掌握的初等数学基础知识,介绍数学建模的基本思想和方法,采用从问题出发的教学方式,重点讲解如何着手分析实际问题,如何从实际问题中提出数学模型以及如何通过数学模型解决实际问题,而非系统讲解模型中的数学.应侧重于教授思维方式和理论架构,启发学生利用网络查询资料,主动探索,合作交流,扩大知识面.通过设置适当课堂讨论题和实践作业,引导学生亲身经历数学建模的学习和实践,解决实际问题,获得成就感,增强自信心,激发结合实际学数学和用数学的动力.

(下转第30页)

- [6] 中小学数学教材改革第二次座谈会纪要[J]. 课程. 教材. 教法, 1981(02): 5-6
- [7] 人民教育出版社中小学数学编辑室. 全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)(征求意见稿)[J]. 数学通报, 1982(05): 1-11
- [8] 张孝达. 《六年制重点中学数学教学大纲(草案)》(征求意见稿)的几点说明[J]. 数学通报, 1982(05): 11-14
- [9] 张楠. 校长工作大全[M]. 西安: 陕西人民出版社, 1991: 857-867
- [10] 顾明远, 申泉华主编. 学校考试与命题管理运作全书[M]. 北京: 开明出版社, 1995: 717
- [11] 中华人民共和国国家教育委员会. 全日制中学数学教学大纲[S]. 北京: 人民教育出版社, 1986
- [12] 国家教育委员会基础教育司. 全日制普通高级中学数学教学大纲(供试验用)[J]. 学科教育, 1996(08): 2-13
- [13] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(实验)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2003
- [14] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018
- [15] 任子朝, 符华均, 黄正正, 张心, 陈昂. 高中文理科学生数学水平比较研究[J]. 课程·教材·教法, 2015, 35(06): 62-67+121
- [16] 黄邦杰. 《全日制普通高级中学数学教学大纲(试验修订版)》特点分析及思考[J]. 课程教材教学研究(中教研究), 2001(08): 11-15
- [17] 中华人民共和国教育部. 一九七八年全国高等学校招生考试复习大纲[M]. 沈阳: 辽宁人民出版社, 1978
- [18] 中华人民共和国教育部. 一九七九年全国高等学校招生考试复习大纲[J]. 河北教育, 1979(01): 33-35
- [19] 海浩, 成文. 全国高考题典数学[M]. 长春: 吉林科学技术出版社, 1996: 1-8
- [20] 任子朝, 周远方, 陈昂, 田祥高. 高考数学科考核目标研究[J]. 数学通报, 2013, 52(07): 1-8
- [21] 教育部考试中心. 普通高等学校招生全国统一考试大纲(课程标准实验版)(2010年版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009: 9-30
- [22] 曹凤山. 把握文理差异 提高复习效率——2009年以来浙江省高考数学文理科差异对比研究[J]. 中国数学教育, 2013(22): 41-43
- [23] 教育部考试中心. 关于2017年普通高考考试大纲修订内容的通知[EB/OL]. (2016-10-9) [2017-10-11] <http://www.neea.edu.cn/html1/report/16103/415-1.htm>
- [24] 教育部考试中心. 2018年普通高等学校招生全国统一考试大纲正式公布[EB/OL] (2017-12-14) [2017-12-15] <http://www.neea.edu.cn/html1/report/1712/8570-1.htm>
- [25] 教育部考试中心. 2019年普通高等学校招生全国统一考试大纲正式公布[EB/OL] (2019-1-31) [2019-2-15] <http://www.neea.edu.cn/html1/report/19012/153-1.htm>
- [26] 刘海峰, 刘亮. 恢复高考40年的发展及变化[J]. 高等教育研究, 2017, 38(10): 1-9
- [27] 冬梅, 飞茂编. 十年全国高考试题解答 1978—1987 理科[M]. 北京: 农村读物出版社, 1988: 1
- [28] 陈昂, 任子朝. 数学文理科试卷难度调控策略[J]. 数学通报, 2011, 50(09): 5-7+13
- [29] 任子朝. 1999年全国普通高考数学试题分析报告[J]. 中学数学教学, 2000(02): 1-3
- [30] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019
- [31] 任子朝, 赵轩. 创设真实情境 突出学科特点 落实“五育”要求——数学高考加强体美劳考查[J]. 数学通报, 2019, 58(07): 23-27
- [32][33] 任子朝, 赵轩. 基于高考评价体系的数学科考试内容改革实施路径[J]. 中国考试, 2019(12): 27-32
- [34] 教育部考试中心. 以真情实景落实“五育并举”以理性思维践行“立德树人”——2019年高考数学试题评析[J]. 中国考试, 2019(07): 7-10
- [35] 郑雪静, 陈清华. 建国以来高考数学试题演变分析与展望[J]. 数学通报, 2017, 56(08): 52-58
- [36] 任子朝, 陈昂, 黄熙彤, 赵轩, 张敏强. 高考数学新题型试卷质量分析研究[J]. 数学教育学报, 2019, 28(01): 1-7
- [37] 张远增. 高考数学不分文理科的探索——基于2018年高考上海卷、浙江卷的分析[J]. 中国考试, 2019(05): 6-15
- [38] 任子朝, 陈昂, 黄熙彤, 赵轩. 新高考试题多选题考查功能研究[J]. 中国数学教育, 2019(Z2): 3-6+19
- [39] 任子朝, 赵轩. 数学考试中的结构不良问题研究[J]. 数学通报, 2020, 59(02): 1-3
- [40] 任子朝, 赵轩. 高考试题创新设计的研究与实践[J]. 中学数学教学参考, 2019(19): 2-5+11

(上接第3页)

数学建模是一门面向实际, 培养学生将实际问题转化为数学问题, 通过建立数学模型理解实际现象或解决实际问题的数学应用能力. 数学建模活动具有复杂性和综合性, 往往需要多人合作完成, 这个过程可以让学生深刻理解数学的演绎逻辑与现实世界的联系, 锻炼学生的学习能力、创造性思维能力、解决实际问题的经验和能力以及团队沟通协作的能力, 培养持久的毅力和信心. 数学建

模被新课程标准列为高中数学必修内容, 是时代的进步和社会发展的要求, 给中学的数学教学改革提出了挑战, 同时也必将使得数学建模教与学的研究成为一个热门研究方向.

#### 参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018