揭示充要条件 促进深度理解 提升思维品质[①]

陶兆龙

（江苏省南京市金陵中学　210005）

不注意揭示数学知识和方法中蕴含的充要条件，学生在对概念与方法一知半解的情况下进行机械学习在目前高中数学教学中较为常见. 这种做法非常不利于学生数学核心素养的发展.

充要条件的学习对学生理解数学概念，掌握数学方法，提升思维品质有着很大的促进作用. 新的课程标准已将充要条件提前到高一上学期讲授. 借此良机，教学中应借助于充要条件，促进学生深度理解数学知识，发展学生的数学核心素养.

1　揭示数学概念定义中充要条件，促进学生对概念的深度理解

数学概念的定义与充要条件有着极为密切的关系，很多数学定义中都意味着一个充要条件. 以适当的方式让学生认识到其中的充要条件是理解有关概念的关键.

在对数定义的教学中遇到过这样的窘境. 在由特殊到一般地花费了一番周折，成功地引入对数定义后，让学生完成下列练习：

求下列各式的值：

(1)$\log_2 32$.

(2)$\log_{27} 9$.

有很多学生一脸茫然，不会算.

后来我们作了改进，在引入定义后，揭示了以下关系：

$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$. ($a>0, a\neq 1$)

依据这一充要条件不仅可以看到求对数值的“操作过程”（转化为指数），还能进一步地认识到对数“结构对象”的属性：对数实际上是“指数”，$\log_a N$ 就是表示实数 a 的多少次方等于 N 的那个数.

明确了这一充要条件后，学生就很容易想到求上述对数值的两种方法：转化为指数或直接由对数的意义求.

空间线面关系的定义就是判断相应线面关系的充要条件，既可以作为判定定理用，也可以作为性质定理用，以前的教学中，有很多教师在这方面处理得比较含糊，现在学习立体几何之前学生已经学习了充要条件，所以，引进概念的定义后，便可明确揭示相应的充要条件.

如线面垂直的定义：

如果直线 l 和平面 α 内的任意一条直线都垂直，就说直线 l 与平面 α 垂直，记为 $l\perp\alpha$.

由此可得：

直线 $l\perp\alpha$ 与平面垂直的充要条件是直线 l 垂直于平面 α 内的任意一条直线.

理解是应用知识的前提，对概念一知半解，灵活运用便无从谈起. 揭示了数学定义中的充要条件，加深了学生对概念的理解，学生思维的深刻性得到了训练，为灵活运用概念奠定了基础.

2　揭示数学定理、公式、法则中的充要条件，促进学生对数学结论的深度理解

高中数学中的数学结论（定理、公式、法则）多数是以“若 p，则 q”的形式呈现，这里 p 是 q 的充分条件，其必要性有的具备、有的不具备. 教材中因考虑到教学要求和学生接受能力等因素，多数未明确. 在充要条件的概念提前到高一上学习以后，为用充要条件的形式来阐述数学结论提供了方便. 明确数学定理、公式与法则中的条件对结论的充分性和必要性，不仅可以深化学生对数学结论的理解，还可以避免学生误用结论.

① 基金项目：江苏省教育科学“十三五”规划重点自筹课题“自组织视域下高中数学教与学方式改进的行为研究（$B-b$/2018/02/90）”.

如学习等差数列$\{a_n\}$的通项公式后可引导学生得到：数列$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是存在常数k,b,使得：$a_n=kn+b\ (n\in \mathbf{N}^*)$.

在单元复习阶段还可以揭示与等差数列的前n项和公式有关的充要条件.

设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，则数列$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\ (n\in \mathbf{N}^*)$.

设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，则数列$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是存在常数a,b,使得：$S_n=an^2+bn\ (n\in \mathbf{N}^*)$.

与公式有关的充要条件实际上揭示了等差数列的本质特征.揭示相关的充要条件，学生对相关知识的认识会上升到一个新的高度，同时还能学习体会到充要条件推证过程中运用的本单元的思想方法，这里有函数思想与递推思想等等.

数学结论中的条件有很多是充要的，也有充分非必要的以及必要非充分的，如不加以厘清，学生会将充分非必要条件或必要非充分条件当作充要条件.即将所有结论一视同仁，皆当成充要条件用.

在学习基本不等式：$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0,b>0)$(等号当且仅当$a=b$时成立)时，应讲清涉及到的两个充要条件：

(1) $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$成立的充要条件是$a\geqslant0,b\geqslant0$,考虑应用时多针对正数，所以设$a>0,b>0$.实际上，$a>0,b>0$只是$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$成立的充分非必要条件.不弄清这一点，学生在这一单元学习的负迁移较多，在应用不等式求最值时，经常不考虑变量的取值范围，默认所有变量都为正数；而对其他几个重要不等式$\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant2,a^2+b^2\geqslant2ab\text{ 等}\right)$的理解，也认为仅对正数成立.

(2)"等号当且仅当$a=b$时成立"的意义是："$a=b$是$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}(a>0,b>0)$成立的充要条件",也可以讲："$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}(a>0,b>0)$当且仅当$a\neq b$".学生在应用基本不等式求最值时经常会把取等号的条件当作取最值的条件，而且这种错误还会在不同学习阶段重复出现，这种现象与初学阶段未讲清有关的充要条件不无关系.

揭示了有关的几个充要条件可以使学生深度理解基本不等式，避免错误运用，同时，还培养了学生思维的深刻性与缜密性.

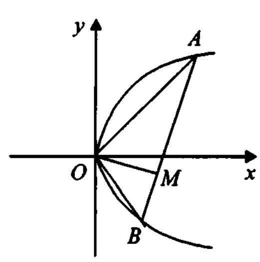
3　揭示数学方法中的充要条件，促进学生对数学转化的深度理解

转化是解决数学问题最重要的、最基本的思维策略，转化意识与能力的强弱在一定程度上反映出学生数学核心素养的水平.解决问题的过程中，一般需要将问题的条件与结论进行转化，通常需要进行等价转化.等价转化实际上就是找到与条件或结论相对应的充要条件，从充要条件的角度揭示转化的等价性，可使学生更加深刻地理解解题过程中的转化策略，更加自觉地对条件进行充分必要的转化，或有意识地、灵活地进行充分非必要，必要非充分转化.

3.1　转化不充要是思维受阻的重要原因

在解决问题的过程中，有不少同学能够对条件进行不同形式的转化，得到很多关系式，但却无法找到解题思路.究其原因，往往是没有充要地转化条件.条件转化得不充分，自然就推不出结论.有的重复转化，没有对转化的充要性(等价性)进行分析，也会使思路陷入混乱.

问题1　设点A和B为抛物线$y^2=4px(p>0)$上除原点以外的两个动点，已知$OA\perp OB$,$OM\perp AB$,求点M的轨迹方程，并说明它表示什么曲线.



在解决这一问题时，有很多同学一会儿设出A,B两点的坐标，找出其关系；一会儿设出直线AB的方程，由方程组找关系，似乎有很多条件可以用，但又求不出轨迹方程.以下的情况极其常见.

设$A\left(\frac{y_1^2}{4p},y_1\right)$,$B\left(\frac{y_2^2}{4p},y_2\right)$,$M(x,y)$,

则由$OA\perp OB$知$\frac{y_1^2}{4p}\cdot\frac{y_2^2}{4p}+y_1y_2=0$,

从而$y_1y_2=-16p^2$.

由$OM\perp AB$知$\frac{y}{x}\cdot\frac{4p}{y_1+y_2}=-1$.

至此，解题中断.

实际上，上述转化并不充分. 点 M 在直线 AB 上或 A, M, B 三点共线便没有体现出来. 而由 $\overrightarrow{MA}//\overrightarrow{MB}$ 可得，

$$\left(x-\frac{y_1^2}{4p}\right)(y-y_1)-\left(x-\frac{y_2^2}{4p}\right)(y-y_2)=0,$$

即 $x+\frac{y}{4p}(y_1+y_2)+\frac{1}{4p}[(y_1+y_2)^2-y_1y_2]=0$，

将 $y_1y_2=-16p^2$，$\frac{y}{x}\cdot\frac{4p}{y_1+y_2}=-1$ 代入上式即可得轨迹方程.

同样，如用直线的斜率为参数，只要将条件充分必要地转化（等价转化），便可以建立参数方程. 如既用坐标参数，又用斜率参数，只要将条件充分必要的体现出来（转化），也可以求出轨迹方程.

教学中，通过揭示条件转化的非充分性以及过度转化导致解题中断，让学生认识到解题思路的探索首先要对问题的条件进行充分必要地转化，这样做可以避免思维的盲目性，并为进一步探索指明方向. 充分必要地转化所有条件是探索解题思路的基本策略.

3.2　揭示典型问题中的充要条件，深度理解等价转化

有不少典型问题的典型解法实际上已经将问题的条件进行了充分必要地转化，但解题过程中并没有给出明示，如不从充要条件角度揭示转化的等价性，学生则难以理解这些方法，这些基本方法的学习效果会大打折扣.

问题 2　如果椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b}=1(0<b<9)$，且椭圆 C 上存在两点 A, B 关于直线 $y=x-1$ 对称，求 b 取值范围.

这类典型对称问题的常规解法有多种，一般是采用分析的方法，即如果存在两点 A, B 关于直线 $y=x-1$ 对称，则利用 AB 中点 M 在椭圆内部，可以得到 $0<b<\frac{19-\sqrt{73}}{2}$. 但推导过程中实际上并没有指明，当 $0<b<\frac{19-\sqrt{73}}{2}$ 时，可以确保对称点的存在. 或者说只是阐明了存在的必要条件，并未论述其充分性.

对于这些解法，学生并未真正理解与接受. 有很多学生甚至无法照搬这种方法解决同类问题，也有不少同学对这种解法的可靠性产生怀疑，竟由直线 $y=-x+\frac{9+b}{9-b}$ 与椭圆方程联立解出交点坐标，再由椭圆上点坐标的范围建立起一个极其复杂的不等式组，试图通过解此不等式组求出 b 的范围. 这也反映了学生对这种解法的极度不信任. 在这种情况下，他们最多只能是机械地套用这种方法处理问题.

无论是从思维缜密性的训练，还是从解题思想方法（等价转化）的学习，或是从解题过程的严谨性来说，都应讨论存在条件的充分性，即应再证明：当 $0<b<\frac{19-\sqrt{73}}{2}$ 时，椭圆上可找到两个点关于直线 $y=x-1$ 对称：

当 $0<b<\frac{19-\sqrt{73}}{2}$ 时，

$$\frac{1}{9}\left(\frac{9}{9-b}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{b}{9-b}\right)^2<1,$$

所以点 $\left(\frac{9}{9-b},\frac{b}{9-b}\right)$ 在椭圆 C 内部，

所以直线 $y-\frac{b}{9-b}=-\left(x-\frac{9}{9-b}\right)$，

也即 $y=-x+\frac{9+b}{9-b}$ 与椭圆 C 相交；

记 $m=\frac{9+b}{9-b}$，由 $\begin{cases}y=-x+m\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b}=1\end{cases}$ 得

$$(b+9)x^2-18mx+9m^2-9b=0,$$

所以 $x_1+x_2=\frac{18m}{b+9}=\frac{18}{9-b}$，

$$y_1+y_2=-(x_1+x_2)+2m=\frac{2b}{9-b}.$$

因为点 $\left(\frac{9}{9-b},\frac{b}{9-b}\right)$ 在直线 $y=x-1$ 上，

直线 $y-\frac{b}{9-b}=-\left(x-\frac{9}{9-b}\right)$ 与直线 $y=x-1$ 垂直，

由此可知直线 $y-\frac{b}{9-b}=-\left(x-\frac{9}{9-b}\right)$ 与椭圆 C 的两个交点关于直线 $y=x-1$ 对称.

问题 3　已知两条曲线：椭圆 C_1：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 和圆 C_2：$x^2+(y-1)^2=r^2$，问 $r(r>0)$ 为何值时，两条曲线没有公共点？

分析与解　学生的一般的解法是，

由方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\\ x^2+(y-1)^2=r^2,\end{cases}$

得 $$-\frac{5}{4}y^2+2y+10-r^2=0, \tag{1}$$

再由 $\Delta<0$，解得 $r>\sqrt{\frac{54}{5}}$.

两条曲线没有公共点，其代数表示即方程组无实数解. 但这里，当 $0<r<1$ 时，同样没有公共点. 这里的问题并非出在开始的代数转化上，而是后来的代数处理上. 实际上，$\Delta<0$ 只能保证方程(1)无实根，而方程组无解的充要条件是方程(1)应在 $[-2,2]$ 上无解.

由 $r^2=-\frac{5}{4}y^2+2y+10, y\in[-2,2]$，

可得 $r\in\left[1,\sqrt{\frac{54}{5}}\right]$，

所以 $r\in(0,1)\cup\left(\sqrt{\frac{54}{5}},+\infty\right)$.

这种错误解法和解决直线与圆锥曲线的位置关系如出一辙，是这一解法的负迁移. 但这两类问题实际上是有区别的.

如直线 $y=x+m$ 与椭圆 $4x^2+y^2=4$ 有两个不同的交点，尽管椭圆上点的横坐标的取值范围是 $[-1,1]$，但并不需要讨论方程 $4x^2+(x+m)^2=4$ 在 $[-1,1]$ 上有两个不等的实根. 因为，只要上述方程有两个不等的实根($\Delta>0$)，由 $4x^2=4-(x+m)^2\leqslant 4$ 知必有 $x\in[-1,1]$. 即此时，在 $[-1,1]$ 上有两个不等的实根的充要条件是方程在 $\mathbf{R}$ 上有两个不等的实根，两者是等价的.

同样地，直线与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左右支相交时，也只需讨论方程有正负根，并不需要讨论方程在 $(-\infty,-a]$ 或 $[a,+\infty)$ 上解的情况.

这是由于直线方程和圆锥曲线方程的结构对转化后的一元二次方程解的范围有制约作用. 在处理直线与曲线或曲线与曲线位置关系时，应对转化前后方程组和方程解之间的充要条件作出分析，以免学生机械模仿，不得要领.

3.3 先充分、后必要或先必要、再充分

在探索解决问题方法的过程中，有时要直接将题设进行等价(充分必要地)转化比较困难，这时可以引导学生主动地放弃充分性或必要性，采取先寻找其充分条件，再考察其必要性；或先确定其必要条件，再讨论其充分性. 即采用以退为进的转化策略，最终得到充要条件. 这种训练对培养学生思维的灵活性有较大帮助.

问题4 已知函数 $f(x)=ax^2+\cos x(a\in\mathbf{R})$，记 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，求 a 的取值范围.

分析与解 求 a 的取值范围实际上就是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值的充要条件.

$f'(x)=2ax-\sin x$，$f'(0)$ 为零，这里无法由 $f(x)$"在 $x=0$ 处取得极小值"直接得到与实数 a 有关的式子，为此，进一步研究

$$g(x)=f'(x),\ g'(x)=2a-\cos x,$$

当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，可以推得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值；

当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，可以推得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值；

当 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ 时，由 $g'(x)=2a-\cos x=0$，

存在 $0<x_0<p$，使得 $g'(x_0)=2a-\cos x_0=0$，

$0<x<x_0$ 时，$\cos x>\cos x_0=2a$，$g'(x)<0$；

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调减，

$$g(x)=f'(x)<g(0)=0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调减，$f(x)<f(0)$，

这与 $f(x)$"在 $x=0$ 处取得极小值"矛盾.

综上所述，a 的取值范围是 $[\frac{1}{2},+\infty)$.

充要条件提前学习为学生数学核心素养的发展提供了良好的契机，在教学过程中，要利用好这一工具，注意揭示数学知识有关的充要条件，促进学生深度理解知识与方法，并灵活运用充要条件进行转化，提高其探索能力.

(上接第38页)

参考文献

[1] 章建跃. 研究平行性的数学思维方式[J]. 数学通报，2019，58(3)：6－10

[2] 章建跃. 研究三角形的数学思维方式[J]. 数学通报，2019，58(4)：1－10

[3] 陈德燕. 数学核心素养理念下的立体几何教学[J]. 数学通报，2017，56(2)：36－38，44

[4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京：人民教育出版社，2018

[5] 章建跃. 章建跃数学教育随想录(上、下卷)[M]. 杭州：浙江教育出版社，2017