

§ 1.3 全称量词与存在量词

复习目标

1. 理解全称量词和存在量词的意义；
2. 能正确地对含一个量词的命题进行否定.

课前热身

1. 命题 “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ” 的否定是“_____”.
2. 命题 “ $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 0$ ” 的否定是“_____”.
3. 命题 “对于函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x} (a \in \mathbb{R})$, 存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x)$ 是偶函数” 为_____命题. (填“真”或“假”)
4. (多选题) 下列命题中是真命题的有()
A. $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x - 1 > 0$ B. $\forall x \in \mathbb{N}^*, (x-1)^2 > 0$ C. $\exists x \in \mathbb{R}, \lg x < 1$ D. $\exists x \in \mathbb{R}, \tan x = 2$
5. 能说明命题 “ $\forall x \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$ ” 是假命题的 x 的值可以是_____ (写出一个即可).
6. 若命题 “ $\exists x \in \mathbb{R}, \text{有 } x^2 - mx - m < 0$ ” 是假命题, 则实数 m 的取值范围是_____.

知识梳理

典例研究

考点一 全称(存在性)命题的真假判断

例 1. (1) 以下四个命题中既是存在性命题又是真命题的是()

- A. 锐角三角形有一个内角是钝角 B. 至少有一个实数 x , 使 $x^2 \leq 0$
C. 两个无理数的和必是无理数 D. 存在一个负数 x , $\frac{1}{x} > 2$

(2) 下列命题中的假命题是()

- A. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, \lg x_0 = 1$ B. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, \sin x_0 = 0$ C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^3 > 0$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, 2^x > 0$

考点二 含有量词命题的否定

例 2. (1) 设命题 p : 所有正方形都是平行四边形, 则命题 p 的否定为()

- A. 所有正方形都不是平行四边形 B. 有的平行四边形不是正方形
C. 有的正方形不是平行四边形 D. 不是正方形的四边形不是平行四边形

(2) 命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, 1 < f(x_0) \leq 2$ ”的否定形式是()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, 1 < f(x) \leq 2$ B. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, 1 < f(x_0) \leq 2$
C. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, f(x_0) \leq 1$ 或 $f(x_0) > 2$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq 1$ 或 $f(x) > 2$

考点三 由命题的真假求参数的取值范围

例 3. (1) 若“ $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right], m \leq \tan x + 2$ ”为真命题, 则实数 m 的最大值为_____.

(2) 已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $g(x) = 2x + a$, 若 $\forall x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \exists x_2 \in [2, 3]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

课堂小结

跟踪反馈

1. 命题：“ $\exists x \in \mathbf{R}, \sin x + \cos x > 2$ ”的否定是_____.

2. 若命题 p 的否定是“对所有正数 x , $\sqrt{x} > x + 1$ ”，则命题 p 是_____.

3. 已知函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ，则()

A . $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) < 0$

B . $\forall x \in (0, +\infty), f(x) \geq 0$

C . $\exists x_1, x_2 \in [0, +\infty), \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

D . $\forall x_1 \in [0, +\infty), \exists x_2 \in [0, +\infty), f(x_1) > f(x_2)$

4. 由命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + m \leq 0$ ”是假命题，求得实数 m 的取值范围是 $(a, +\infty)$ ，则实数 $a =$ _____.

5. 已知函数 $f(x) = a^2x - 2a + 1$. 若命题“ $\forall x \in (0, 1), f(x) \neq 0$ ”是假命题，则实数 a 的取值范围是_____.

6. 若 $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = ax + 2(a > 0)$, $\forall x_1 \in [-1, 2], \exists x_0 \in [-1, 2]$, 使 $g(x_1) = f(x_0)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

纠错补偿

1. 订正： 题号

2. 补偿训练：