2021 届高考数学模拟预热卷（新高考）（一）

【满分：150 分】

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.若集合 $A=\{y\mid y=2^x,x\in\mathbf{R}\},B=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$,则(　　)

A. $A\subseteq B$　　B. $A\supseteq B$　　C. $A=B$　　D. $A\cap B=\varnothing$

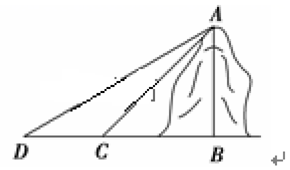
2.已知纯虚数 z 满足 $(1-2\mathrm{i})z=2+a\mathrm{i}$,其中 i 为虚数单位,则实数 a 等于(　　)

A. -1　　B.1　　C. -2　　D.2

3.5 名同学相约去国家博物馆参观“伟大的变革——庆祝改革开放 40 周年大型展览”,参观结束后 5 名同学排成一排照相留念,若甲、乙二人不相邻,则不同的排法共有(　　)

A.36 种　　B.48 种　　C.72 种　　D.120 种

4.如图,从山顶 A 望地面上 C,D 两点,测得它们的俯角分别为 $45°$ 和 $30°$,已知 $CD=100$ 米,点 C 位于 BD 上,则山高 AB 等于(　　)



A. 100 米　　B. $50\sqrt{3}$ 米　　C. $50\sqrt{2}$ 米　　D. $50(\sqrt{3}+1)$ 米

5.设有两组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_n$， 它们的平均数分别是 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$，则新的一组数据 $2x_1-3y_1+1,2x_2-3y_2+1,\cdots,2x_n-3y_n+1$ 的平均数是(　)。

A. $2\overline{x}-3\overline{y}$　　B. $2\overline{x}-3\overline{y}+1$　　C. $4\overline{x}-9\overline{y}$　　D. $4\overline{x}-9\overline{y}+1$

6.毛衣柜里的樟脑丸会随着时间挥发而体积缩小，刚放进的新丸体积为 a ，经过 t 天后体积 V 与天数 t 的关系式为 $V=a\cdot e^{-k}$.若新丸经过 50 天后，体积变为 $\frac{4}{9}a$，则一个新丸体积变为 $\frac{8}{27}a$ 需经过的时间为(　　)

A.125 天　　B.100 天　　C.75 天　　D.50 天

7.在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $b^2+c^2=a^2+bc$. 若 $\sin B\cdot\sin C=\sin^2 A$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是（　　）

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

8.已知定义在$[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}]$上的函数$f(x)$满足$f(x)=f(\frac{1}{x})$,且当$x\in[\frac{1}{\mathrm{e}},1]$时,$f(x)=x\ln x+1$,若方程$f(x)-\frac{1}{2}x-a=0$有三个不同的实数根,则实数$a$的取值范围是(　　)

A. $(\frac{1}{3\mathrm{e}},1-\frac{1}{\mathrm{e}}]$　　B. $(\frac{1}{3\mathrm{e}},1-\frac{3}{2\mathrm{e}}]$　　C. $(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},1-\frac{1}{\mathrm{e}}]$　D. $(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},1-\frac{3}{2\mathrm{e}}]$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得3分，有选错的得0分.

9.设O为坐标原点，F_1,F_2是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦点.若在双曲线上存在点$P$，满足$\angle F_1PF_2=60°,|OP|=\sqrt{7}a$，则(　　)

A.双曲线的方程可以是$\frac{x^2}{2}-y^2=1$　　B.双曲线的渐近线方程是$\sqrt{2}x\pm y=0$

C.双曲线的离心率为$\sqrt{3}$　　D.$\triangle PF_1F_2$的面积为$\sqrt{3}a^2$

10.等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n,已知$S_{10}=0,S_{15}=25$,则(　　)

A.$a_5=0$　　B.$\{a_n\}$的前 n 项和中S_5最小

C.nS_n的最小值为-49　　D.$\frac{S_n}{n}$的最大值为0

11.已知函数$f(x)=-\log_2 x$,下列说法正确的是(　　)

A.函数$f(|x|)$为偶函数

B.若$f(a)=|f(b)|$,其中$a>0,b>0,a\neq b$,则$ab=1$

C.函数$f(-x^2+2x)$在$(1,3)$上单调递增

D.若$0<a<1$,则$|f(1+a)|<|f(1-a)|$

12.信息熵是信息论中的一个重要概念，设随机变量 X 所有可能的取值为$1,2,\cdots n$，且$P(X=i)=p_i>0,(i=1,2,\cdots n),\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，定义 X 的信息熵$H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$，(　　)

A.若$n=1$，则$H(X)$=0

B.若$n=2$，则$H(X)$随着p_i的增大而增大

C.若 $p_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots n)$，则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大

D.若 $n=2m$，随机变量 Y 所有可能的取值为 $1,2,\cdots m$，且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}(j=1,2,\ldots m)$，则 $H(X)\le H(Y)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.抛物线 $y^2=4x$ 上到其焦点的距离为 1 的点的个数为__________.

14.已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，其中 $a_n=n^2$，$n\in\mathbf{N}^*$，$\{b_n\}$ 的项是互不相等的正整数，若对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$\{b_n\}$ 的第 a_n 项等于 $\{a_n\}$ 的第 b_n 项，则 $\frac{\lg(b_1b_4b_9b_{16})}{\lg(b_1b_2b_3b_4)}=$________________.

15.已知三棱锥 $P-ABC$ 的所有棱长都相等，现沿 PA,PB,PC 三条侧棱剪开，将其表面展开成一个平面图形，若这个平面图形外接圆的半径为 $2\sqrt{6}$，则三棱锥 $P-ABC$ 的内切球的体积为________.

16.已知长方体木块 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $AB=BC=12\text{cm}, AA_1=8\text{cm}$,从该木块中挖去一个圆锥,使得圆锥的顶点为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心,底面圆为正方形 $ABCD$ 的内切圆,则剩余部分的表面积为_____________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （10 分）已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,设 $\sqrt{7}\left(a\cos B+b\cos A\right)=ac$,且 $\sin 2A=\sin A\cdot$

(1)求 A 及 a；

(2)若 $b-c=2$,求 BC 边上的高.

18. （12 分）设 $\left\{a_n\right\}$ 是公比不为 1 的等比数列, a_1 为 a_2,a_3 的等差中项.

(1)求 $\left\{a_n\right\}$ 的公比；

(2)若 $a_1=1$,求数列 $\left\{na_n\right\}$ 的前 n 项和.

19. （12 分）为评估设备 M 生产某种零件的性能,从设备 M 生产零件的流水线上随机抽取 100 个零件作为样本,测量其直径后,整理得到下表:

直径/mm	57	58	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	72	合计
件数	1	1	3	5	6	19	33	18	4	4	2	1	2	1	100

经计算,样本的平均值$u=64$,标准差$\sigma=2.2$,以频率作为概率的估计值.

(1)为评估设备 M 的性能,从样本中任意抽取一个零件,记其直径为 X,并根据以下规则进行评估(P 表示相应事件的频率):

① $P(u-\sigma<X\le u+\sigma)\ge 0.6827$;② $P(u-2\sigma<X\le u+2\sigma)\ge 0.9545$;③ $P(u-3\sigma<X\le u+3\sigma)\ge 0.9973$.

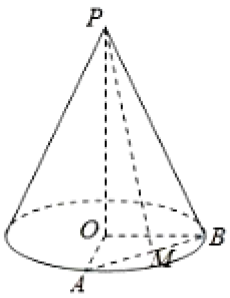
若同时满足上述三个不等式,则设备 M 的性能等级为甲;若满足其中两个不等式,则设备 M 的性能等级为乙;若仅满足其中一个不等式,则设备 M 的性能等级为丙;若全部不满足,则设备 M 的性能等级为丁.试判断设备 M 的性能等级.

(2)将直径小于或等于$u-2\sigma$或直径大于$u+2\sigma$的零件认为是次品.

(i)从设备 M 的生产流水线上任意抽取 2 个零件,计算其中次品个数 Y 的数学期望;

(ii)从样本中任意抽取 2 个零件,计算其中次品个数 Z 的数学期望 $E(Z)$

20. （12 分）已知圆锥的顶点为P ,底面圆心为O ,半轻为2.



(1)设圆锥的母线长为 4,求圆锥的体积

(2)设 $PO=4,OA,OB$ 是底面半径,且$\angle AOB=90^o$, M 为线段 AB 的中点,如图,求异面直线 PM 与 OB 所成的角的大小

21. （12 分）已知函数 $f(x)=\log_a(x+1)$,函数 $y=g(x)$ 的图象上任意一点 P 关于原点的对称点 Q 的轨迹恰好是函数 $f(x)$ 的图象.

(1)写出 $g(x)$ 的解析式：

(2)若 $a>1, x\in[0,1)$ 时，总有 $f(x)+g(x)\geq m$ 成立，求实数 m 的取值范围.

22. （12 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,点 P $(\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ 在 C 上.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)设 O 为坐标原点, $H(0,-\frac{1}{2})$,试判断在椭圆 C 上是否存在三个不同点 Q,M,N (其中 M,N 的纵坐标不相等),满足 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$,且直线 HM 与直线 HN 倾斜角互补？若存在,求出直线 MN 的方程,若不存在,说明理由.

答案以及解析

一、单项选择题

1.答案：A

解析：集合 $A=\left\{y\mid y=2^{x},x\in\mathbf{R}\right\}=\left\{y\mid y>0\right\},B=\left\{y\mid y=x^{2},x\in\mathbf{R}\right\}=\{y\mid y\geq 0\},\therefore A\subseteq B$.

2.答案：B

解析：因为 $(1-2\mathrm{i})z=2+a\mathrm{i}$,所以 $z=\dfrac{2+a\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{(2+a\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\dfrac{2-2a+(4+a)\mathrm{i}}{5}$.又 z 是纯虚数,所以 $2-2a=0,4+a\neq 0$,所以 $a=1$.故选 B.

3.答案：C

解析：除甲、乙二人外,其他 3 名同学排成一排,不同的排法有 $\mathrm{A}_3^3=6$ (种),这 3 名同学排好后,留下 4 个空位,排甲、乙,不同的排法有 $\mathrm{A}_4^2=12$ (种),所以不同的排法有 $6\times 12=72$ (种).

4.答案：D

解析：在 $\triangle ACD$ 中，$CD=100$ 米

$,\angle D=30°,\angle DAC=\angle ACB-\angle D=45°-30°=15°,\therefore=\dfrac{AC}{\sin\angle D}=\dfrac{CD}{\sin\angle DAC}$

$\therefore AC=\dfrac{CD\sin D}{\sin\angle DAC}=\dfrac{100\sin 30°}{\sin 15°}=\dfrac{50}{\sin 15°}$ 在 ΔABC 中 $,\angle ACB=45°,\angle ABC=90°,AC=\dfrac{50}{\sin 15°}$ 米,

$\therefore AB=AC\sin\ 45°=\dfrac{50\sin 45°}{\sin 15°}=50\left(\sqrt{3}+1\right)$ 米

5.答案：B

解析：设 $z_i=2x_i-3y_i+1(i=1,2,\cdots,n)$，则

$\bar{z}=\dfrac{1}{n}\left(z_1+z_2+\cdots+z_n\right)=\dfrac{2}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)-\dfrac{3}{n}\left(y_1+y_2+\cdots+y_n\right)+\dfrac{1+1+\cdots+1}{n}=2\bar{x}-3\bar{y}+1$。

6.答案：C

解析：由题意知 $a>0$，当 $t=50$ 时，有 $\dfrac{4}{9}a=a\cdot e^{-50k}$.

即 $\dfrac{4}{9}=(e^{-k})^{50}$，得 $e^{-k}=\sqrt[50]{\dfrac{4}{9}}$.

所以当 $V=\dfrac{8}{27}a$ 时，有 $\dfrac{8}{27}a=a\cdot e^{-kt}$.

即 $\dfrac{8}{27}=(e^{-k})^{t}=(\dfrac{4}{9})^{\frac{t}{50}}$，得 $(\dfrac{2}{3})^{3}=(\dfrac{2}{3})^{\frac{t}{25}}$.

所以 $t=75$.故选 C.

7.答案：C

解析：在$\triangle ABC$中，$\because b^2+c^2=a^2+bc$，

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$.

$\because \sin B\cdot\sin C=\sin^2 A$，

$\therefore bc=a^2$，代入$b^2+c^2=a^2+bc$，

$\therefore (b-c)^2=0$，解得$b=c$.

$\therefore \triangle ABC$的形状是等边三角形.

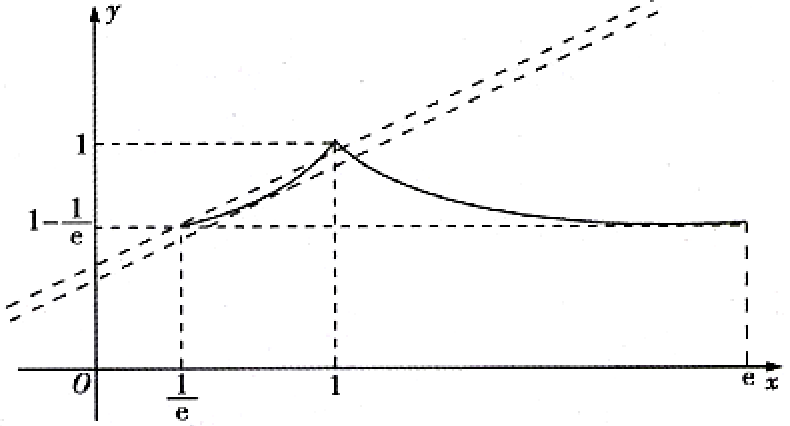
8.答案：D

解析：因为$f(x)=f(\dfrac{1}{x})$,且当$x\in[\dfrac{1}{e},1]$时，$f(x)=x\ln x+1$,所以当$x\in(1,e]$时,

$f(x)=f(\dfrac{1}{x})=-\dfrac{1}{x}\ln x+1$,则$f(x)=\begin{cases}x\ln x+1,x\in[\dfrac{1}{e},1]\\-\dfrac{1}{x}\ln x+1,x\in(1,e]\end{cases}$,当$x\in[\dfrac{1}{e},1]$时,

$f'(x)=1+\ln x\geq 0$,则$f(x)$在$(1,e]$上单调递减.因为方程$f(x)-\dfrac{1}{2}x-a=0$有三个不同的交点,作出函数$f(x)$的大致图象,如图所示.当直线$y=\dfrac{1}{2}x+a$和$f(x)$的图象相切时,结合图象,设切点为(x_0,y_0),由$f'(x_0)=1+\ln x_0\dfrac{1}{2}$,可得$x_0=e^{-\frac{1}{2}},y_0=1-\dfrac{1}{2}\times e^{-\frac{1}{2}}$,代入方程

$y=\dfrac{1}{2}x+a$,可得$a=1-e^{-\frac{1}{2}}$;当直线$y=\dfrac{1}{2}x+a$过点$(\dfrac{1}{e},1-\dfrac{1}{e})$时，$a=1-\dfrac{3}{2e}$,由图可知实数$a$的取值范围是$(1-e^{-\frac{1}{2}},1-\dfrac{3}{2e}]$.



二、多项选择题

9.答案：BC

解析：如图，$\because O$ 为 F_1F_2 的中点，$\therefore \overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{PO}$，

$\therefore \left(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right)^2=(2\overrightarrow{PO})^2$，

即 $\left|\overrightarrow{PF_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{PF_2}\right|^2+2\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF_2}\right|\cdot\cos 60°=4|\overrightarrow{PO}|^2$.

又 $\because |OP|=\sqrt{7}a$，

$\therefore \left|\overrightarrow{PF_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{PF_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\left|\overrightarrow{PF_2}\right|=28a^2$.①

又由双曲线的定义得 $\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|=2a$，

$\therefore \left(\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|\right)^2=4a^2$.

即 $\left|PF_1\right|^2+\left|PF_2\right|^2-2\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|=4a^2$.②

由①$-$②得 $\left|PF_1\right|\cdot\left|PF_2\right|=8a^2,\therefore \left|PF_1\right|^2+\left|PF_2\right|^2=20a^2$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得

$$\cos 60°=\frac{\left|PF_1\right|^2+\left|PF_2\right|^2-\left|F_1F_2\right|^2}{2\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|},$$

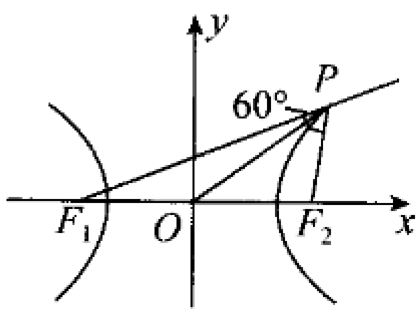
$\therefore 8a^2=20a^2-4c^2$，即 $c^2=3a^2$.

又 $\because c^2=a^2+b^2,\therefore b^2=2a^2$，即 $\dfrac{b^2}{a^2}=2,\dfrac{b}{a}=\sqrt{2}$.

$\therefore$ 双曲线的渐近线方程为 $\sqrt{2}x\pm y=0$.

双曲线的离心率为 $\sqrt{3}$，双曲线的方程可以是 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$，

$\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\left|PF_1\right|\left|PF_2\right|\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{1}{2}\times 8a^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}a^2$.故 BC 正确.



10.答案：BC

解析：设数列$\{a_n\}$的公差为 d ,则$\begin{cases}10a_1+45d=0,\\15a_1+105d=25,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-3,\\d=\dfrac{2}{3},\end{cases}$ $a_n=\frac{1}{3}(2n-11), a_5=-\frac{1}{3}$,A 错误; $S_n=\frac{1}{3}\left(n^2-10n\right)=\frac{1}{3}(n-5)^2-\frac{25}{3}$,B 正确; $nS_n=\frac{n^3}{3}-\frac{10}{3}n^2$,设函数

$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{10}{3}x^2(x>0)$,则 $f'(x)=x^2-\frac{20}{3}x$,当 $x\in\left(0,\frac{20}{3}\right)$时, $f'(x)<0$,当 $x\in\left(\frac{20}{3},+\infty\right)$

时, $f'(x)>0$,所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{20}{3}\right)$,

$6<\frac{20}{3}<7$,且 $f(6)=-48, f(7)=-49$,所以最小值为-49,C 正确;

$\frac{S_n}{n}=\frac{1}{3}(n-10)$,没有最大值,D 错误.

11.答案：ABD

解析：对于 A, $f(|x|)=-\log_2|x|, f(|-x|)=-\log_2|-x|=-\log_2|x|=f(|x|)$,所以函数 $f(|x|)$ 为偶函数,故 A 正确;

对于 B,若 $f(a)=|f(b)|$,其中 $a>0,b>0,a\neq b$,则 $f(a)=|f(b)|=-f(b),-\log_2 a=\log_2 b$,即

$\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab=0$,得 $ab=1$,故 B 正确;

对于 C,函数 $f\left(-x^2+2x\right)=-\log_2\left(-x^2+2x\right)$,由$-x^2+2x>0$,解得$0<x<2$,所以函数

$f\left(-x^2+2x\right)$的定义域为$(0,2)$,因此在$(1,3)$上不具有单调性,故 C 错误;

对于 D,因为$0<a<1$,所以$1+a>1>1-a>0,0<1-a^2<1$,所以 $f(1+a)<0<f(1-a)$,故

$|f(1+a)|-|f(1-a)|=\left|-\log_2(1+a)\right|-\left|-\log_2(1-a)\right|=\log_2(1+a)+\log_2(1-a)=\log_2\left(1-a^2\right)<0$,

故 D 正确.故选 ABD.

12.答案：AC

解析：对于选项 A，若 $n=1$，则 $p_1=1$， $\log_2 1=0$ ，$\therefore H(X)=-p_1\log_2 p_1=-\log_2 1=0$，A 正确.对于选项 B，当 $p_1=\frac{1}{4}$时，

$H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i=-\left(p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2\right)=-\left(\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4}\right)$，当 $p_1=\frac{3}{4}$时，

$H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i=-\left(p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2\right)=-\left(\frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}\right)$，由此可得，当

$p_1=\frac{1}{4}$与 $p_1=\frac{3}{4}$时，信息熵相等，$\therefore$B 不正确.对于选项 C，若 $p_i=\frac{1}{n}$，则

$H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i=-\left(\frac{1}{n}\log_2\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\log_2\frac{1}{n}\right)=n\times\frac{\log_2 n}{n}=\log_2 n$，$\therefore H(X)$ 随着 n 的增大而增大，C 正确.对于选项 D，若 $n=2m$，随机变量 Y 的可能取值为$1,2,\ldots,m$，由

$P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}(j=1,2,\cdots,m)$ 知，$P(Y=1)=p_1+p_{2m}$；$P(Y=2)=p_2+p_{2m-1}$；

$P(Y=3)=p_3+p_{2m-2}$；$\cdots$；

$P(Y=m)=p_m+p_{m+1}$.

$H(X)=-\left[\left(p_1\log_2 p_1+p_{2m}\log_2 p_{2m}\right)+\left(p_2\log_2 p_2+p_{2m-1}\log_2 p_{2m-1}\right)+\cdots+\left(p_m\log_2 p_m+p_{m+1}\log_2 p_{m+1}\right)\right]$

，

$H(Y)=-\left[\left(p_1+p_{2m}\right)\log_2\left(p_1+p_{2m}\right)+\left(p_2+p_{2m-1}\right)\log_2\left(p_2+p_{2m-1}\right)+\cdots+\left(p_m+p_{m+1}\right)\log_2\left(p_m+p_{m+1}\right)\right]$

，

$H(Y)-H(X)=-\left[\left(p_1+p_{2m}\right)\log_2\left(p_1+p_{2m}\right)+\cdots+\left(p_m+p_{m+1}\right)\log_2\left(p_m+\right.\right.$

$\left.\left.p_{m+1}\right)\right]+p_1\log_2 p_1+p_{2m}\log_2 p_{2m}+\cdots+p_m\log_2 p_m+p_{m+1}\log_2 p_{m+1}$

$=p_1\cdot\log_2\frac{p_1}{p_1+p_{2m}}+\cdots+p_{2m}\cdot\log_2\frac{p_{2m}}{p_1+p_{2m}}$.易知$0<\frac{p_1}{p_1+p_{2m}}<1$，$\cdots$，$0<\frac{p_{2m}}{p_1+p_{2m}}<1$，

$\therefore\log_2\frac{p_1}{p_1+p_{2m}}<0$，$\cdots$，$\log_2\frac{p_{2m}}{p_1+p_{2m}}<0$，$\therefore H(Y)<H(X)$，故 D 错误.

三、填空题

13.答案：1

解析：本题考查抛物线的定义.由题知焦点 $F(1,0)$，设抛物线上的点 $A\left(x_1,y_1\right)$，则 $x_1+1=1$，

解得 $x_1=0$，则 $y_1=0$，所以抛物线 $y^2=4x$ 上到其焦点的距离为 1 的点的个数为 1.

14.答案：2

解析：$b_{a_n}=a_{b_n}\Rightarrow b_{n^2}=b_n{}^2\Rightarrow b_1b_4b_9b_{16}=(b_1b_2b_3b_4)^2\Rightarrow\frac{\lg(b_1b_4b_9b_{16})}{\lg(b_1b_2b_3b_4)}=2$

15.答案：$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

解析：三棱锥 $P-ABC$ 展开后为一等边三角形,设边长为 a ,则 $4\sqrt{6}=\frac{a}{\sin A}$,$\therefore a=6\sqrt{2}$，

∴三棱锥 $P-ABC$ 棱长为$3\sqrt{2}$,三棱锥 $P-ABC$ 的高为 $2\sqrt{3}$，

设内切球的半径为 r ,则 $4\times\frac{1}{3}r\times S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times 2\sqrt{3}$，

$\therefore r=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴三棱锥 $P-ABC$ 的内切球的体积为 $\frac{4\pi}{3}r^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

16.答案：$\left(672+24\pi\right)\text{cm}^2$

解析：剩余部分的表面积为长方体木块 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面积减去一个半径为 6cm 的圆的面积,再加上一个底面半径为 6cm ,高为 8cm 的圆锥的侧面积,即

$672-\pi\times6^2+\pi\times6\times\sqrt{6^2+8^2}=672+24\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

四、解答题

17.答案：(1)因为 $\sqrt{7}\left(a\cos B+b\cos A\right)=ac$,根据正弦定理得,

$\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{\sqrt{7}}{7}a\sin C,$

$\therefore\sin C=\frac{\sqrt{7}}{7}a\sin C,$ 又因为 $\sin C\neq0,$,

$\therefore a=\sqrt{7}.$

$\because\sin2A=\sin A,\therefore2\sin A\cos A=\sin A,$

因为 $\sin A\neq0,$ 所以 $\cos A=\frac{1}{2},$

$\because A\in(0,\pi),\therefore A=\frac{\pi}{3}.$

(2)由(1)知, $a=\sqrt{7},A=\frac{\pi}{3}.$

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$

$\therefore7=b^2+c^2-bc,\therefore7=(b-c)^2+bc,$

因为 $b-c=2$,所以 $7=4+bc,$ 所以 $bc=3.$

设 BC 边上的高为 h .

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah,\therefore\frac{1}{2}\times\sqrt{7}h=\frac{3\sqrt{3}}{4},\therefore h=\frac{3\sqrt{21}}{14}.$

即 BC 边上的高为 $\frac{3\sqrt{21}}{14}$.

18.答案：(1)设 $\left\{a_n\right\}$ 的公比为 q ,由题设得 $2a_1=a_2+a_3$,即 $2a_1=a_1q+a_1q^2$.

所以 $q^2+q-2=0$,解得 $q=1$(舍去), $q=-2$.

故$\{a_n\}$的公比为-2.

(2)记S_n为$\{na_n\}$的前 n 项和.由(1)及题设可得,$a_n=(-2)^{n-1}$.所以

$S_n=1+2\times(-2)+\cdots+n\times(-2)^{n-1}$,

$-2S_n=-2+2\times(-2)^2+\cdots+(n-1)\times(-2)^{n-1}+n\times(-2)^n$.

可得$3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n\times(-2)^n$

$=\dfrac{1-(-2)^n}{3}-n\times(-2)^n$.

所以$S_n=\dfrac{1}{9}-\dfrac{(3n+1)(-2)^n}{9}$.

19.答案:(1)因为

$P(u-\sigma<X\le u+\sigma)=P(61.8<X\le 66.2)=0.8\ge 0.6827$,

$P(u-2\sigma<X\le u+2\sigma)=P(59.6<X\le 68.4)=0.94<0.9545$,

$P(u-3\sigma<X\le u+3\sigma)=P(57.4<X\le 70.6)=0.98<0.9973$,

所以设备M的性能等级为丙.

(2)易知样本中次品共 6 个,可估计设备M生产零件的次品率为 0.06.

(i)由题意可知$Y\sim B(2,0.06)$,于是$E(Y)=2\times0.06=0.12$.

(ii)Z 的分布列为

Z	0	1	2
P	$\dfrac{C_{94}^2}{C_{100}^2}$	$\dfrac{C_6^1C_{94}^1}{C_{100}^2}$	$\dfrac{C_6^2}{C_{100}^2}$

故$E(Z)=0\times\dfrac{C_{94}^2}{C_{100}^2}+1\times\dfrac{C_6^1C_{94}^1}{C_{100}^2}+2\times\dfrac{C_6^2}{C_{100}^2}=\dfrac{3}{25}=0.12$.

20.答案:(1)记圆锥底面半径为 R,联结PO,OB,则$PO\perp$底面,

为圆锥的高,记其长度为 h ,$\therefore PO\perp OB$;

根据题意,$PB=4,OB=R=2$

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle POB$中, $h=PO=2\sqrt{3}$;

圆锥底面积$S=\pi R^2=4\pi$;

故圆锥体积$V=\dfrac{1}{3}S\mathrm{h}=\dfrac{1}{3}\times4\pi\times3\sqrt{3}=\dfrac{8\sqrt{3\pi}}{3}$

(2)找到OA中点N ,并联结MN,PN,OM

根据中位线定理，$MN//OB$且($MN=\frac{1}{2}OB=1$),故异面直线PM与OB所成角的大小,即为

PM与MN所成角的大小

又N 为OA中点,故$ON=1$;而$\angle AOB=90^\circ$故在等腰$\mathrm{Rt}\triangle POM,\mathrm{Rt}\triangle PON$中算得:

$PM=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$、$PN=\sqrt{17}$

故在$\triangle PMN$中$\cos\angle PMN=\frac{PM^2+MN^2-PN^2}{2\cdot PM\cdot MN}=\frac{18+1-17}{2\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$

故$\angle PMN=\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$,即异面直线$PM$与$OB$所成角的大小为$\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$

21.答案：(1)由题意， 设$P(x,y)$是函数$y=g(x)$图象上的任意一点，

则P关于原点的对称点Q的坐标为$(-x,-y)$.

因为已知点Q在函数$f(x)$的图象上，

所以$-y=f(-x)$，而$f(x)=\log_a(-x+1)$，

所以$-y=\log_a(-x+1)$，所以$y=-\log_a(-x+1)$，

而$P(x,y)$是函数$y=g(x)$图象上的点，

所以$y=g(x)=-\log_a(-x+1)=\log_a\frac{1}{1-x}$.

(2)当$x\in[0,1)$时，

$f(x)+g(x)=\log_a(x+1)+\log_a\frac{1}{1-x}=\log_a\frac{1+x}{1-x}$.

下面求当$x\in[0,1)$时$f(x)+g(x)$的最小值.

令$\frac{1+x}{1-x}=t$，则$x=\frac{t-1}{t+1}$.

因为$x\in[0,1)$，即$0\le\frac{t-1}{t+1}<1$，解得$t\ge1$，

所以$\frac{1+x}{1-x}\ge1$.

又$a>1$，所以$\log_a\frac{1+x}{1-x}\ge\log_a1=1$，

所以$f(x)+g(x)\ge0$，

所以$x\in[0,1)$ 时，$f(x)+g(x)$的最小值为 0.

因为当$x\in[0,1)$时，总有$f(x)+g(x)\ge m$成立，

所以$m\le0$，即所求m的取值范围为$(-\infty,0]$.

22.答案：(1)由题意知

可得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a^2-b^2=c^2$，$\frac{8}{3a^2}+\frac{1}{3b^2}=1$，解得 $a=2$，$b=1$，

则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2)由题意,直线 MN 的斜率存在且不为 0,设直线 MN 方程为 $y=kx+m$，

设点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$,得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2}$ ，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$，

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2m}{1+4k^2}$，

因为 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$，

所以 $Q(\frac{-16km}{1+4k^2},\frac{4m}{1+4k^2})$，

因为 Q 在椭圆上,所以 $\frac{(\frac{-16km}{1+4k^2})^2}{4}+(\frac{4m}{1+4k^2})^2=1$，

化简得 $16m^2=1+4k^2$，

满足 $\Delta>0$，

又因为直线 HM 与直线 HN 倾斜角互补,

所以 $k_{HE}+k_{HF}=0$，

所以 $\frac{y_1+\frac{1}{2}}{x_1}+\frac{y_2+\frac{1}{2}}{x_2}=0$，

所以 $\frac{kx_1+m+\frac{1}{2}}{x_1}+\frac{kx_2+m+\frac{1}{2}}{x_2}=0$，

所以 $2kx_1x_2+(m+\frac{1}{2})(x_1+x_2)=0$，

所以 $\frac{4k(m+2)}{1+4k^2}=0$，

因为 $k\neq 0$,所以 $m=-2$,代入 $16m^2=1+4k^2$ 得 $k=\pm\frac{3\sqrt{7}}{2}$，

所以存在满足条件的三个点,此时直线 MN 的方程为 $y=\frac{3\sqrt{7}}{2}x-2$ 或 $y=-\frac{3\sqrt{7}}{2}x-2$.