从平面向量的角度认识数学问题 2392

李伟健

（安徽省滁州中学 239000）

文[1]提出了一个涉及三点共线的命题，本文探讨的问题是：题设中的条件“点 A、B、C、D 在$\odot O$上”是否必要．首先选取平面向量的角度重新证明数学问题 2392，在证明的过程中揭示条件“点 A、B、C、D 在$\odot O$上”是多余的．建立在这一判断基础之上，本文提出数学问题 2392 的修正命题．

数学问题 2392 如图1，若 PAB、PCD 分别是$\odot O$的两条割线，交$\odot O$于点 A、B、C、D，AD 与 BC 相交于点 Q．若点 M、N 分别满足四边形 $MAQC$、四边形 $NBQD$ 都是平行四边形．证明：P、M、N 三点共线．

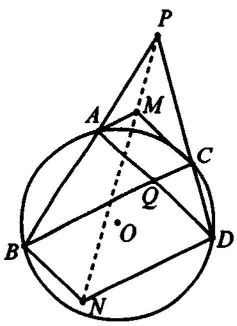

图1

证明 因为 P、C、D 三点共线，

所以设$\overrightarrow{QP}=\lambda\overrightarrow{QC}+(1-\lambda)\overrightarrow{QD}$，$\lambda\in\mathbf{R}$；

同理可设$\overrightarrow{QP}=\mu\overrightarrow{QA}+(1-\mu)\overrightarrow{QB}$，$\mu\in\mathbf{R}$．

另外设$\overrightarrow{QC}=x\overrightarrow{QB}$，$\overrightarrow{QD}=y\overrightarrow{QA}$，$x\in\mathbf{R}$，$y\in\mathbf{R}$．

所以 $\lambda x\overrightarrow{QB}+(1-\lambda)y\overrightarrow{QA}=\mu\overrightarrow{QA}+(1-\mu)\overrightarrow{QB}$，

推出$\begin{cases}\lambda x=1-\mu\\(1-\lambda)y=\mu\end{cases}$，$\lambda+\mu\neq1$，

所以$\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC})+\left(1-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}\right)(\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD})$

$=\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}+\left(1-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}\right)y\right)\overrightarrow{QA}$

$+\left(\left(1-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}\right)+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}x\right)\overrightarrow{QB}$.

又因为$\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}+\left(1-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}\right)y$

$=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}+\left(1-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}\right)\frac{\mu}{1-\lambda}=\mu$，

$\left(1-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}\right)+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}x$

$=\left(1-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}\right)+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}\frac{1-\mu}{\lambda}=1-\mu$，

所以$\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC})+\left(1-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}\right)(\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QD})=\mu\overrightarrow{QA}+(1-\mu)\overrightarrow{QB}$，

即$\overrightarrow{QP}=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}\overrightarrow{QM}+\left(1-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-1}\right)\overrightarrow{QN}$，

所以 P、M、N 三点共线．

通过上面的证明可以发现，数学问题 2392 中的条件“点 A、B、C、D 在$\odot O$上”与结论“P、M、N 三点共线”无关，因此数学问题 2392 可以修正为如下命题，即：

数学问题 2392 修正命题 如图2，已知平面内四点 A、B、C、D 任意三点不共线，且 AD 与 BC 相交于点 Q．若点 M、N 分别满足四边形 $MAQC$、四边形 $NBQD$ 都是平行四边形．那么 P、M、N 三点共线．

证明 设直线 AD 与 BC 的无穷远点分别为 E_∞、F_∞，根据帕普斯线，$AB\times CD=P$、$AF_\infty\times CE_\infty=M$、$BE_\infty\times DF_\infty=N$ 三点共线．

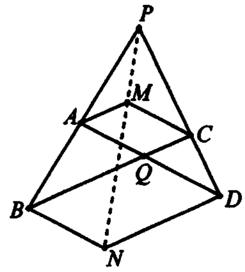

图2

从上述证明可以发现：考察数学问题 2392 的结构特征，本质是帕普斯线定理．

[1]数学问题解答．数学问题 2392 [J]．数学通报，2017，56(11)：封底．