解三角形及其应用

班级________姓名________学号________评价________.

【例题分析】

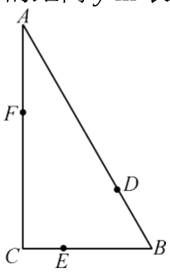
例 1. ΔABC 中， D 是 BC 上的点， AD 平分 $\angle BAC$， ΔABD 面积是 ΔADC 面积的 2 倍.

(1) 求 $\dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$；　　(2)若 $AD=1$， $DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 BD 和 AC 的长.

例 2. 10.如图，某公园有三条观光大道 AB，BC，AC 围成直角三角形，其中直角边 BC＝200 m，斜边 AB＝400 m．现有甲、乙、丙三位小朋友分别在 AB，BC，AC 大道上嬉戏，所在位置分别记为点 D，E，F.

(1) 若甲、乙都以每分钟 100 m 的速度从点 B 出发在各自的大道上奔走，到大道的另一端时即停，乙比甲迟 2 分钟出发，当乙出发 1 分钟后，求此时甲、乙两人之间的距离；

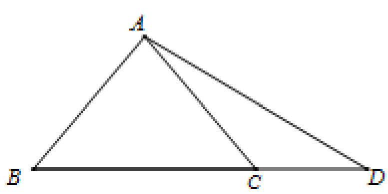
(2) 设$\angle CEF$＝θ，乙、丙之间的距离是甲、乙之间距离的 2 倍，且$\angle DEF$＝$\dfrac{\pi}{3}$，请将甲、乙之间的距离 y m 表示为 θ 的函数，并求甲、乙之间的最小距离.



【举一反三】

1.如图， ΔABC 是等腰直角三角形， $\angle BAC=90^\circ$,点 D 在边 BC 的延长线上，且 $BC=2CD$,
$AD=\sqrt{5}$.

（1）求 $\dfrac{\sin\angle CAD}{\sin\angle D}$ 的值；　　（2）求 CD 的长.



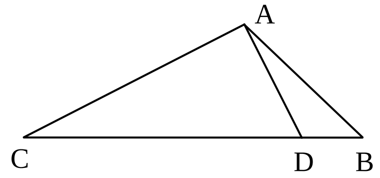
2. ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知$b\cos C+b\sin C=a$.

（1）求角 B 的大小；（2）若 B C 边上的高等于 $\frac{1}{4}a$，求$\cos A$的值.

课后作业

1 .如图△ABC 中，已知点 D 在 BC 边上，且 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$AB=3\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{3}$.

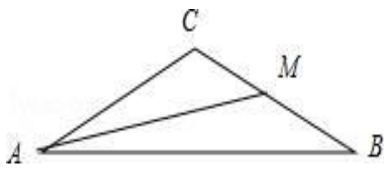
（1）求 AD 的长；（2）求 $\cos C$.



.

2.在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\frac{2b-\sqrt{3}c}{\sqrt{3}a}=\frac{\cos C}{\cos A}$.

（1）求角 A 的值；（2）若角 $B=\frac{\pi}{6}$，BC 边上的中线 $AM=\sqrt{7}$，求边 b.



3.在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且$\sqrt{3}c\cos$ A=（$2b-\sqrt{3}a$）$\cos$C.

(1)求角 C；(2)若 A=$\frac{\pi}{6}$，△ABC 的面积为$\sqrt{3}$，D 为 AB 的中点，求 sin∠BCD.

4.已知 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a=b\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$.

（1）求 B；（2）若点 D 为边 AC 的中点，$BD=1$，求 ΔABC 面积的最大值.

解三角形及其应用

【例题分析】

例 1. (Ⅰ) $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD$，$S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle CAD$，因为 $S_{\Delta ABD}=2S_{\Delta ADC}$，$\angle BAD=\angle CAD$，所以 $AB=2AC$．由正弦定理可得 $\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$．

(Ⅱ)因为 $S_{\Delta ABD}:S_{\Delta ADC}=BD:DC$，所以 $BD=\sqrt{2}$．在 ΔABD 和 ΔADC 中，由余弦定理得

$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB$，$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos\angle ADC$．

$AB^2+2AC^2=3AD^2+BD^2+2DC^2=6$．由(Ⅰ)知 $AB=2AC$，所以 $AC=1$．

【提分秘籍】

【名师点睛】本题考查了三角形的面积公式、角分线、正弦定理和余弦定理，由角分线的定义得角的等量关系，由面积关系得边的关系，由正弦 c 定理得三角形内角正弦的关系；分析两个三角形中 $\cos\angle ADB$ 和 $\cos\angle ADC$ 互为相反数的特点结合已知条件，利用余弦定理列方程，进而求 AC．

例 2 解：(1) 依题意，得 BD＝300 m，BE＝100 m.在△ABC 中，$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$，∴ $B=\frac{\pi}{3}$.(2 分)

在△BDE 中，由余弦定理，得 $DE^2=BD^2+BE^2-2BD\cdot BE\cos B=300^2+100^2-2\times300\times100\times\frac{1}{2}=70\ 000$，∴ $DE=100\sqrt{7}$ m．(6 分)故甲、乙两人之间的距离为 $100\sqrt{7}$ m．(7 分)

(2) 由题意，得 EF＝2DE＝2y m，∠BDE＝∠CEF＝θ.

在直角三角形 CEF 中，$CE=EF\cos\angle CEF=2y\cos\theta$ m．(9 分)

在△BDE 中，由正弦定理，得 $\frac{BE}{\sin\angle BDE}=\frac{DE}{\sin\angle DBE}$，即 $\frac{200-2y\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{y}{\sin 60^\circ}$，

∴ $y=\frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}=\frac{50\sqrt{3}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，(12 分)

∴ 当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，y 有最小值 $50\sqrt{3}$.(13 分)故甲、乙之间的最小距离为 $50\sqrt{3}$ m．(14 分)

【举一反三】

1. 解：（1）因为 ΔABC 为等腰直角三角形，所以 $AC=\frac{\sqrt{2}}{2}BC$，

又 $BC=2CD$，所以 $AC=\sqrt{2}CD$，在 ΔADC 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle D}$，即

$\dfrac{\sin\angle CAD}{\sin\angle D}=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2) 设 $CD=x$，则 $AC=\sqrt{2}x$，在 ΔADC 中：

$AD^2=CD^2+AC^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD$，即 $5=x^2+2x^2+2\sqrt{2}x^2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\Rightarrow x=1$，即 $CD=1$

2. （Ⅰ）**解：** 因为 $b\cos C+b\sin C=a$， 由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得，

$\sin B\cos C+\sin B\sin C=\sin A$. 因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin B\cos C+\sin B\sin C=\sin(B+C)$. ·········2 分

即 $\sin B\cos C+\sin B\sin C=\sin B\cos C+\cos B\sin C$. 因为 $\sin C\neq 0$，

所以 $\sin B=\cos B$. 因为 $\cos B\neq 0$，所以 $\tan B=1$.

因为 $B\in(0,\ \pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{4}$.

（Ⅱ）**解法 1：** 设 BC 边上的高线为 AD，则 $AD=\dfrac{1}{4}a$. 因为 $B=\dfrac{\pi}{4}$，则 $BD=AD=\dfrac{1}{4}a$，

$CD=\dfrac{3}{4}a$. 所以 $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}a$， $AB=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$.

由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\bullet AC}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 所以 $\cos A$ 的值为 $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

解法 2： 设 BC 边上的高线为 AD，则 $AD=\dfrac{1}{4}a$. 因为 $B=\dfrac{\pi}{4}$，则 $BD=AD=\dfrac{1}{4}a$，

$CD=\dfrac{3}{4}a$. 所以 $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}a$， $AB=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$.

由正弦定理 $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$，得 $\sin A=\dfrac{BC\sin B}{AC}=\dfrac{a\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{10}}{4}a}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

在△ ABC 中，由 $AB<AC$ ，得 $C<B=\dfrac{\pi}{4}$，所以 A 为钝角.

所以 $\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 所以 $\cos A$ 的值为 $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

解法 3: 设 BC 边上的高线为 AD，则 $AD=\dfrac{1}{4}a$. 因为 $B=\dfrac{\pi}{4}$，则 $BD=AD=\dfrac{1}{4}a$，$CD=\dfrac{3}{4}a$.

设$\angle DAC=\theta$，则$\tan\theta=\dfrac{CD}{AD}=3$． 所以$\tan A=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=-2$，所以$A$为钝角．

所以$\cos^2 A=\dfrac{1}{1+\tan^2 A}=\dfrac{1}{5}$， 因为$A$为钝角．所以$\cos A=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

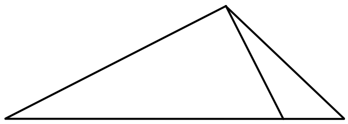
课后作业

1．（Ⅰ）由$AD\perp AC$知， $\sin\angle BAC=\sin(\angle DAB+\dfrac{\pi}{2})=\cos\angle DAB=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

在$\triangle ABD$中，由余弦定理知$BD^2=AD^2+AB^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD$

即$AD^2-8AD+15=0$，解得$AD=3$或$AD=5$

显然$AB>AD$，故$AD=3$．



（Ⅱ）由$\cos\angle DAB=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$得$\sin\angle BAD=\dfrac{1}{3}$

在$\triangle ABD$中，由正弦定理知$\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，故$\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos C=\cos(\angle ADB-\dfrac{\pi}{2})=\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

2.解：(I) 在ΔABC中，$\because \dfrac{2b-\sqrt{3}c}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\cos C}{\cos A}$，

$\therefore (2b-\sqrt{3}c)\cos A=\sqrt{3}a\cos C$，

$\therefore 2\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin C\cos A=\sqrt{3}\sin(A+C)=\sqrt{3}\sin B$，

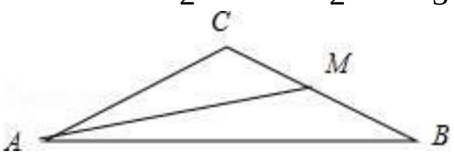
$\therefore \cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore A=\dfrac{\pi}{6}$.

（Ⅱ）$\because A=B=\dfrac{\pi}{6}$， $\quad\therefore a=b, C=\pi-B-A=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\because BC$边上的中线$AM=\sqrt{7}$，

$\therefore$在ΔACM中，由余弦定理可得：$AM^2=AC^2+CM^2-2AC\cdot CM\cdot\cos C$，

即：$7=b^2+(\dfrac{1}{2}b)^2-2b\times\dfrac{b}{2}\times\cos\dfrac{2\pi}{3}$， $\quad\therefore$整理解得$b=2$.



3.

17. 解：(1)由$\sqrt{3}c\cos A=(2b-\sqrt{3}a)\cos C$，得 $2b\cos C=\sqrt{3}(c\cos A+a\cos C)$，由正弦定理可得，$2\sin B\cos C=\sqrt{3}(\sin C\cos A+\sin A\cos C)=\sqrt{3}\sin(A+C)=\sqrt{3}\sin B$，因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $0<C<\pi$，

所以 $C=\frac{\pi}{6}$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $A=\frac{\pi}{6}$，故$\triangle ABC$ 为等腰三角形，且顶角 $B=\frac{2\pi}{3}$， ………………………………………… 6 分

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a^2\sin B=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=\sqrt{3}$， ………………………………………………………… 7 分

所以 $a=2$，在$\triangle DBC$ 中，由余弦定理可得，$CD^2=DB^2+BC^2-2DB\cdot BC\cos B=7$，所以 $CD=\sqrt{7}$，在$\triangle DBC$ 中，由正弦定理可得，$\frac{CD}{\sin B}=\frac{DB}{\sin\angle BCD}$，即$\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sin\angle BCD}$，所以 $\sin\angle BCD=\frac{\sqrt{21}}{14}$. …………………… 10 分

4. 解

(1) 因为 $a=b\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$，由正弦定理知 $\sin A=\sin B\sin C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$.

即 $\sin(B+C)=\sin B\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，

$\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin B\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，

$\cos B\sin C=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$.又由 C 为 ΔABC 的内角，故而 $\sin C\neq 0$，

所以 $\tan B=-\sqrt{3}$，又由 B 为 ΔABC 的内角，故而 $B=\frac{2\pi}{3}$.

（2）因为点 D 为 AC 边的中点，故而 $2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$，

两边平方得 $4\left|\overrightarrow{BD}\right|^2=\left|\overrightarrow{BA}\right|^2+2\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\angle ABC+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$，

又由（1）知 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，设 $\left|\overrightarrow{BA}\right|=c,\left|\overrightarrow{BC}\right|=a$，即 $4=a^2+c^2-ac$，

所以 $4+ac=a^2+c^2\geq 2ac$，即 $ac\leq 4$，当且仅当 $a=c=2$ 时取等号.

又 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，

故而当且仅当 $a=c=2$ 时，$S_{\Delta ABC}$ 取到最大值 $\sqrt{3}$.