

班级_____ 姓名_____ 成绩_____

一、填空题（本大题共 2 小题，共 10.0 分）

1. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB \parallel DC$ ， $AB = 2$ ， $BC = 1$ ， $\angle ABC = 60^\circ$. 点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上，且 $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的值为_____.
2. 我国著名的数学家秦九韶在《数书九章》提出了“三斜求积术”. 他把三角形的三条边分别称为小斜、中斜和大斜. 三斜求积术就是用小斜平方加上大斜平方，送到中斜平方，取相减后余数的一半，自乘而得一个数，小斜平方乘以大斜平方，送到上面得到的那个数，相减后余数被 4 除，所得的数作为“实”，1 作为“隅”，开平方后即得面积. 所谓“实”、“隅”指的是在方程 $px^2 = q$ 中， p 为“隅”， q 为“实”. 即若 $\triangle ABC$ 的大斜、中斜、小斜分别为 a, b, c ，则 $S^2 = \frac{1}{4}[a^2c^2 - (\frac{a^2+c^2-b^2}{2})^2]$.
 已知点 D 是 $\triangle ABC$ 边 AB 上一点， $AC = 3$ ， $BC = 2$ ， $\angle ACD = 45^\circ$ ， $\tan \angle BCD = \frac{8+\sqrt{15}}{7}$ ，
 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

二、解答题

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\cos A = \frac{1}{3}$ ，且 $\triangle ABC$ 的边 a, b, c 所对的角分别为 A, B, C .
 (1) 求 $\sin 2(B+C) + \cos^2 \frac{B+C}{2}$ 的值；
 (2) 若 $a = 2\sqrt{2}$ ，试求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

4. 某企业为确定下一年投入某种产品的研发费用, 需了解年研发费用 x (单位: 千万元)对年销售量 y (单位: 千万件)的影响, 统计了近 10 年投入的年研发费用 x_i 与年销售量 y_i ($i = 1, 2, \dots, 10$)的数据, 得到散点图如图所示.

(1)利用散点图判断 $y = a + bx$ 和 $y = c \cdot x^d$ (其中 c, d 均为大于 0 的常数)哪一个更适合作为年销售量 y 和年研发费用 x 的回归方程类型(只要给出判断即可, 不必说明理由);

(2)对数据作出如下处理, 令 $u_i = \ln x_i, v_i = \ln y_i$, 得到相关统计量的值如表: 根据第(1)问的判断结果及表中数据, 求 y 关于 x 的回归方程;

$\sum_{i=1}^{10} v_i$	$\sum_{i=1}^{10} u_i$	$\sum_{i=1}^{10} (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})$	$\sum_{i=1}^{10} (u_i - \bar{u})^2$
15	15	28.25	56.5

(3)已知企业年利润 z (单位: 千万元)与 x, y 的关系为 $z = 18e^{-\frac{3}{4}y} - \frac{9}{2}x$ (其中 $e \approx 2.71828$), 根据第(2)问的结果判断, 要使得该企业下一年的年利润最大, 预计下一年应投入多少研发费用?

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $\hat{v} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}u$ 的斜率

和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}$.

