

数 学 试 题

(完卷时间:120 分钟;满分:150 分)

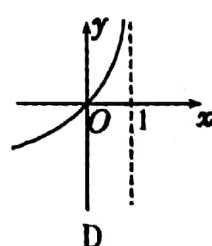
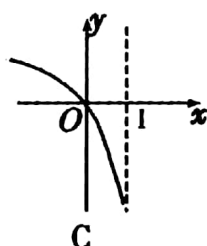
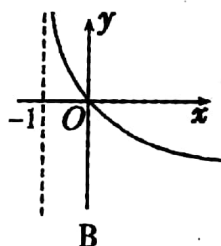
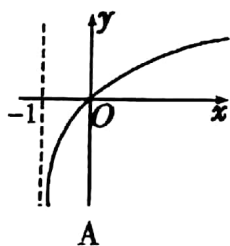
注意事项:

1. 答题前,考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名.考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致.
2. 第 I 卷每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号.第 II 卷用毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答.在试题卷上作答,答案无效.
3. 考试结束,考生必须将试题卷和答题卡一并交回.

第 I 卷

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x | x = 2k + 1, k \in A\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{1, 3\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{3, 5\}$ D. $\{1, 3, 5\}$
2. 设复数 $z = a + bi$ ($a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}$), 则满足 $|z - 1| \leq 1$ 的复数 z 有
 A. 7 个 B. 5 个 C. 4 个 D. 3 个
3. “ $m \leq 5$ ”是“ $m^2 - 4m - 5 \leq 0$ ”的
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 若抛物线 $y = mx^2$ 上一点 $(t, 2)$ 到其焦点的距离等于 3, 则
 A. $m = \frac{1}{4}$ B. $m = \frac{1}{2}$ C. $m = 2$ D. $m = 4$
5. 已知函数 $f(x) = \ln x$, 则函数 $y = f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ 的图象大致为



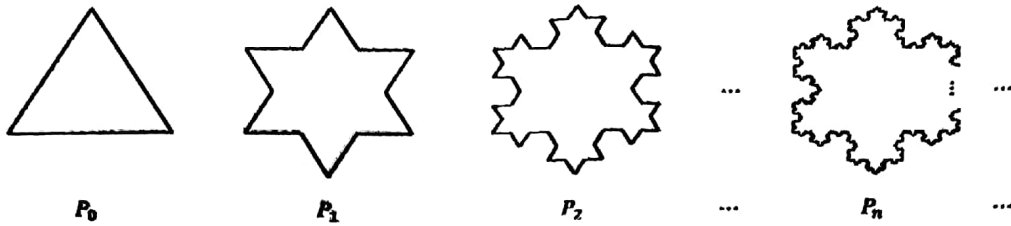
6. 在 $\triangle ABC$ 中, E 为 AB 边的中点, D 为 AC 边上的点, BD, CE 交于点 F . 若 $\vec{AF} = \frac{3}{7}\vec{AB} + \frac{1}{7}\vec{AC}$,

则 $\frac{AC}{AD}$ 的值为

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5



7. 分形几何学是一门以不规则几何形态为研究对象的几何学.如图,有一列曲线 $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$.已知 P_0 是边长为 1 的等边三角形, P_{k+1} 是对 P_k 进行如下操作而得到:将 P_k 的每条边三等分,以每边中间部分的线段为边,向外作等边三角形,再将中间部分的线段去掉 ($k=0, 1, 2, \dots$).记 P_n 的周长为 L_n 、所围成的面积为 S_n .对于 $\forall n \in \mathbf{N}$,下列结论正确的是



- A. $\left\{ \frac{S_n}{L_n} \right\}$ 为等差数列
 B. $\left\{ \frac{S_n}{L_n} \right\}$ 为等比数列
 C. $\exists M > 0$, 使 $L_n < M$
 D. $\exists M > 0$, 使 $S_n < M$

8. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $(0, 1)$, 在区间 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上为单调函数, 把 $f(x)$ 的图象向右平移 π 个单位长度后与原来的图象重合. 设 $x_1, x_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(x_1 + x_2)$ 的值为

- A. $-\sqrt{3}$ B. -1 C. 1 D. $\sqrt{3}$

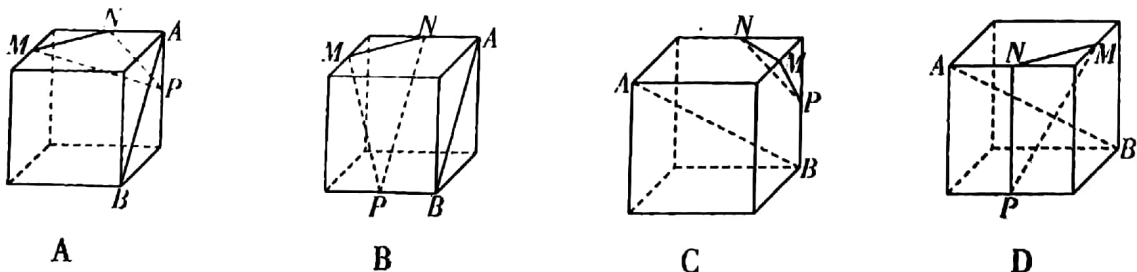
二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分.

9. “一粥一饭, 当思来之不易”, 道理虽简单, 但每年我国还是有 2 000 多亿元的餐桌浪费, 被倒掉的食物相当于 2 亿多人一年的口粮. 为营造“节约光荣, 浪费可耻”的氛围, 某市发起了“光盘行动”. 某机构为调研民众对“光盘行动”的认可情况, 在某大型餐厅中随机调查了 90 位来店就餐的客人, 制成如右所示的列联表, 通过计算得到 K^2 的观测值为 9. 已知 $P(K^2 \geq 6.635) = 0.010$, $P(K^2 \geq 10.828) = 0.001$, 则下列判断正确的是

	认可	不认可
40 岁以下	20	20
40 岁以上 (含 40 岁)	40	10

- A. 在该餐厅用餐的客人中大约有 66.7% 的客人认可“光盘行动”
 B. 在该餐厅用餐的客人中大约有 99% 的客人认可“光盘行动”
 C. 有 99% 的把握认为“光盘行动”的认可情况与年龄有关
 D. 在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下, 认为“光盘行动”的认可情况与年龄有关

10. 如图, 在下列四个正方体中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, P 为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 直线 $AB \parallel$ 平面 MNP 的是



11. 已知 P 是双曲线 $E: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 在第一象限上一点, F_1, F_2 分别是 E 的左、右焦点, $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{15}{2}$. 则以下结论正确的是

A. 点 P 的横坐标为 $\frac{5}{2}$

B. $\frac{\pi}{3} < \angle F_1PF_2 < \frac{\pi}{2}$

C. $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 1

D. $\angle F_1PF_2$ 平分线所在的直线方程为 $3x - 2y - 4 = 0$

12. 在数学中, 双曲函数是一类与三角函数类似的函数. 最基本的双曲函数是双曲正弦函数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 和双曲余弦函数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 等. 双曲函数在物理及生活中有着某些重要的应用, 譬如达·芬奇苦苦思索的悬链线(例如固定项链的两端, 使其在重力的作用下自然下垂, 那么项链所形成的曲线即为悬链线)问题, 可以用双曲余弦型函数来刻画. 则下列结论正确的是

A. $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$

B. $y = \cosh x$ 为偶函数, 且存在最小值

C. $\forall x_0 > 0, \sinh(\sinh x_0) > \sinh x_0$

D. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R},$ 且 $x_1 \neq x_2, \frac{\sinh x_1 - \sinh x_2}{x_1 - x_2} > 1$

第 II 卷

注意事项:

用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答. 在试题卷上作答, 答案无效.

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在题中的横线上.

13. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-4 \leq 0, \\ 2x+y-6 \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $x-2y$ 的取值范围为_____.

14. $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中, $\frac{1}{x}$ 的系数为_____.

15. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧面 PAC 与底面 ABC 垂直, $\angle BAC = 90^\circ, \angle PCA = 30^\circ, AB = 3, PA = 2$. 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为_____.

16. 已知圆 C 的方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, 过点 $M(2, 0)$ 的直线与圆 C 交于 P, Q 两点(点 Q 在第四象限). 若 $\angle QMO = 2\angle QPO$, 则点 P 的纵坐标为_____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在① $S_n = 2a_n + 1$; ② $a_1 = -1, \log_2(a_n a_{n+1}) = 2n - 1$; ③ $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}, S_2 = -3, a_3 = -4$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题的横线上, 并解答.

问题: 已知单调数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足_____.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{-na_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, a + b = c \cos B - b \cos C$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 设 CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 求证: $\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} = \frac{1}{CD}$.

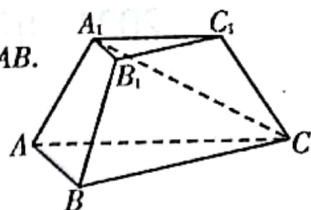


19. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=A_1C_1=CC_1=1, AC=2, A_1C \perp AB$.

(1) 求证:平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 ;

(2) 若 $\angle BAC=90^\circ, AB=1$, 求二面角 $A-BB_1-C$ 的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 $A_1(-\sqrt{2}, 0), A_2(\sqrt{2}, 0)$, 上、下顶点分

别为 B_1, B_2 , 四边形 $A_1B_2A_2B_1$ 的周长为 $4\sqrt{3}$.

(1) 求 E 的方程;

(2) 设 P 为 E 上异于 A_1, A_2 的动点, 直线 A_1P 与 y 轴交于点 C , 过 A_1 作 $A_1D \parallel PA_2$, 与 y 轴交于点 D . 试探究在 x 轴上是否存在一定点 Q , 使得 $\vec{QC} \cdot \vec{QD} = 3$, 若存在, 求出点 Q 坐标; 若不存在, 说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

从 2021 年 1 月 1 日起某商业银行推出四种存款产品, 包括协定存款、七天通知存款、结构性存款及大额存单. 协定存款年利率为 1.68%, 有效期一年, 服务期间客户账户余额须不少于 50 万元, 多出的资金可随时支取; 七天通知存款年利率为 1.8%, 存期须超过 7 天, 支取需要提前七天建立通知; 结构性存款存期一年, 年利率为 3.6%; 大额存单, 年利率为 3.84%, 起点金额 1 000 万元. (注: 月利率为年利率的十二分之一)

已知某公司现有 2020 年底结余资金 1 050 万元.

(1) 若该公司有 5 个股东, 他们将通过投票的方式确定投资一种存款产品, 每个股东只能选择一种产品且不能弃权, 求恰有 3 个股东选择同一种产品的概率;

(2) 公司决定将 550 万元作协定存款, 于 2021 年 1 月 1 日存入该银行账户, 规定从 2 月份起, 每月首日支取 50 万元作为公司的日常开销. 将余下 500 万元中的 x 万元作七天通知存款, 准备投资高新项目, 剩余 $(500-x)$ 万元作结构性存款.

① 求 2021 年全年该公司从协定存款中所得的利息;

② 假设该公司于 2021 年 7 月 1 日将七天通知存款全部取出, 本金 x 万元用于投资高新项目, 据专业机构评估, 该笔投资到 2021 年底将有 60% 的概率获得 $(-\frac{x^3}{30000} + 0.02x^2 + 0.135x)$ 万元的收益, 有 20% 的概率亏损 $0.27x$ 万元, 有 20% 的概率保本. 问: x 为何值时, 该公司 2021 年存款利息和投资高新项目所得的总收益的期望最大, 并求最大值.

22. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x) = x^2 e^x - 1$.

(1) 判断 $f(x)$ 的零点个数, 并说明理由;

(2) 若 $f(x) \geq a(2\ln x + x)$, 求实数 a 的取值范围.

