

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$ ， $B = \{x | \lg x > 0\}$ ，则 $C_U(A \cup B)$ 为

A. $\{x | x \leq -1\}$

B. $\{x | x < 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$

C. $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x > 2\}$

D. $\{x | x < -1\}$

2. 把函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标不变，再把所得曲线

向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $y = f(x)$ 的图象，则 $f(x) =$

A. $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{12}\right)$

B. $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{12}\right)$

C. $\sin\left(2x - \frac{7\pi}{12}\right)$

D. $\sin\left(2x - \frac{11\pi}{12}\right)$

3. 我国古代数学名著《算法统宗》记有行程减等问题：三百七十八里关，初行健步不为难. 次日脚痛减一半，六朝才得到其关. 要见每朝行里数，请公仔细算相还. 意为：某人步行到 378 里的要塞去，第一天走路强壮有力，但把脚走痛了，次日因脚痛减少了一半，他所走的路程比第一天减少了一半，以后几天走的路程都比前一天减少一半，走了六天才到达目的地. 请仔细计算他每天各走多少路程？在这个问题中，第四天所走的路程为

A. 96

B. 48

C. 24

D. 12

4. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ，则 “ $a > 0, b > 0$ ” 是 “ $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ” 成立的

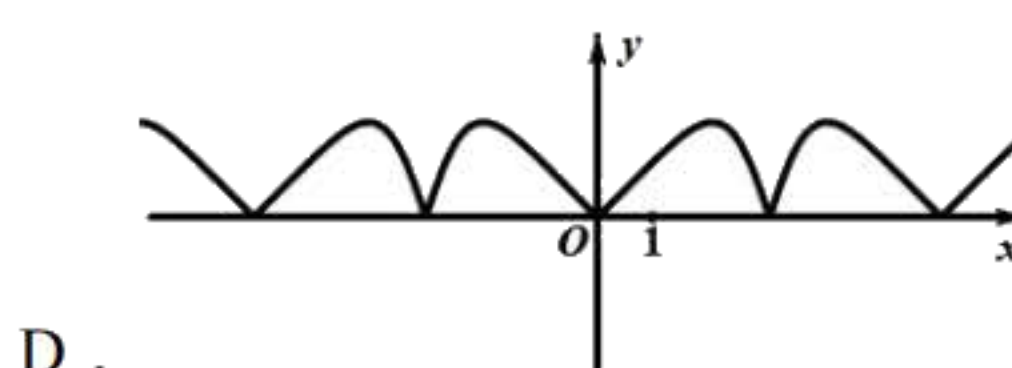
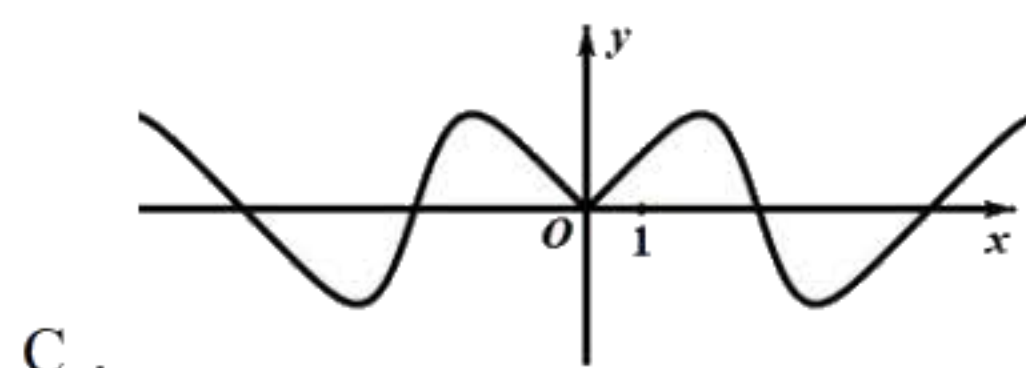
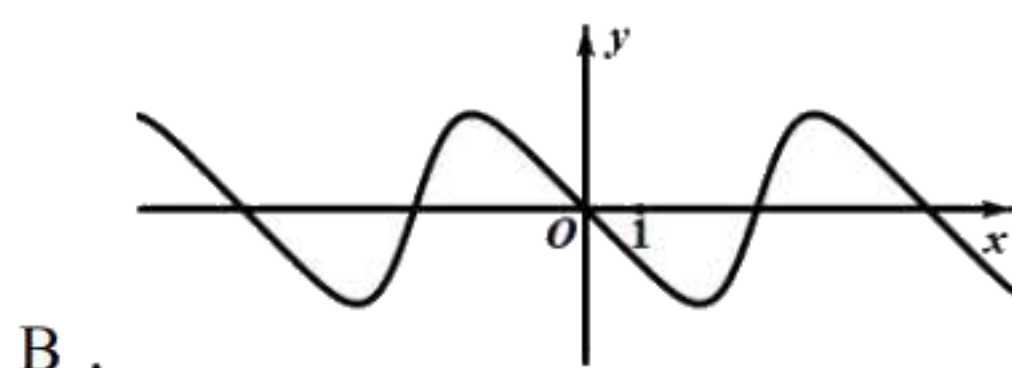
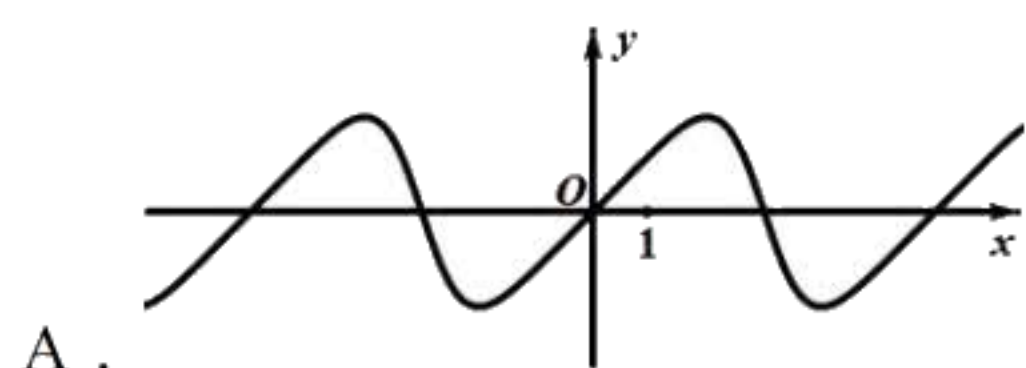
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分又不必要条件

5. 函数 $f(x) = \frac{3\sin|x|}{2 + \cos x}$ 的部分图象为



6. 已知 $a = \log_3 2, b = \log_5 2, c = 0.5^{a-1}$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

7. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 7, AC = 3, \angle ACB = 120^\circ$, 当 $\lambda \in \mathbb{R}$ 时, $|\overrightarrow{AB} - \lambda \overrightarrow{AC}|$ 的最小值为

- A. 10 B. $5\sqrt{3}$ C. 5 D. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

8. 中国科学院院士吴文俊在研究中国古代数学家刘徽著作的基础上, 把刘徽常用的方法概括为“出入相补原理”: 一个图形不论是平面的还是立体的, 都可以切割成有限多块, 这有限多块经过移动再组合成另一个图形, 则后一图形的面积或体积保持不变. 利用这个原理, 解决下面问题: 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(4-x) = f(x)$, 且当 $x \in [0, 2]$ 时的解析式为

$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3), & 0 \leq x \leq 1 \\ x(x-1)(x+1), & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 则函数 $y = f(x)$ 在 $x \in [0, 4]$ 时的图象与直线

$y = -6$ 围成封闭图形的面积是

- A. $12\sqrt{3}$ B. 24 C. $16\sqrt{3}$ D. 32

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列关于复数 $z = \frac{2}{-1+i}$ 的四个命题中, 真命题有

A . $|z| = \sqrt{2}$ B . $z^2 = -2i$ C . z 的共轭复数为 $-1+i$ D . z 的虚部为 -1

10 . 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 > 0$ 且 $S_{2021} = 0$, 则下列说法正确的有

A . $a_{1010} = 0$ B . $a_{1011} = 0$ C . $a_1 + a_{2020} > 0$ D . $a_2 + a_{2021} > 0$

11 . 已知函数 $f(x) = e^{\sin x} - e^{\cos x}$, 其中 e 是自然对数的底数 , 下列说法正确的有

A . $f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ B . $f(x)$ 是周期函数

C . $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数 D . $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内有且只有一个零点

12 . 已知关于 x 的方程 $xe^x - a = 0$ 有两个不等的实根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则下列说法正确的有

A . $a > -e^{-1}$ B . $x_1 + x_2 < -2$ C . $x_2 < a$ D . $x_1 + e^{x_2} < 0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13 . 曲线 $y = e^{x-1}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为_____.

14 . 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{4}$, 且 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) =$ _____.

15 . 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差为 d , 且满足 $a_3 > 0$, $a_3 + a_4 < 0$, 则 $\frac{a_1}{d}$ 的取值范围是_____.

值范围是_____ , $\frac{S_4}{S_2}$ 的取值范围是_____. (第一空 2 分 , 第二空 3 分)

16 . 已知实数 a, b 满足 $e^{2021-a} - a = 0$, $e^{2-\ln b} - \ln b - 2019 = 0$, 则 $ab =$ _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17 . (10 分) 已知向量 $\vec{a} = (2, 3)$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{13}$.

(1) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 求 $\vec{b}$ 的坐标 ;

(2) $(5\vec{a} - 2\vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

18 . (12 分) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边 , 且

$$a \cos C + \frac{\sqrt{3}}{3} a \sin C = b + c .$$

(1) 求角 A 的大小 ;

(2) 若 $a = \sqrt{21}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c 的值.

19 . (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{2}{7}$, 且满足 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n + 1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求证 : 数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} - 3 \right\}$ 为等比数列 ;

(2) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 100$, 求满足条件的最大正整数 n .

20 . (12 分) 在平面四边形 $ABCD$ 中 , $AB = 1$, $BC = CD = 2$, $AD = 3$.

(1) 证明 : $3\cos A - 4\cos C = 1$;

(2) 记 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 的面积分别为 S_1 和 S_2 , 求 $S_1^2 + S_2^2$ 的最大值 .

21 . (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{m \cdot 2^x + 1}{2^x + 1} (m > 0)$.

(1) 若 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 2)$ 对称 , 求实数 m 的值 ;

(2) 设 $g(x) = f(x)(4^x - 1)$, 若存在 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$, 使得 $|g(x_1) - g(x_2)| \geq \frac{4}{3}$, 求实数 m 的

取值范围 .

22 . (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+a}$.

(1) 当 $a = -1$ 时 , 判断 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的单调性 ;

(2) 当 $a > 1$ 时 , 记 $f(x)$ 的最大值为 M , 求证 : $M \in \left(e^{-a}, \frac{1}{2} \right)$.