江苏省仪征中学 2020 届高三（上）期中专题复习(1)——平面向量数量积

班级______________ 姓名______________ 学号______________ 评价__________

一、热身练习：

1. 如图，在▱$ABCD$中，已知 $AB=2$，$AD=1$，$\angle DAB=60°$，点 M 为 AB 的中点，点 P 在 CD 上运动（包括端点），则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DM}$ 的取值范围是__________。$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

2. 已知$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为 120°，且$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=2$. 若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，且$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$，则实数 λ 的值为________. $\frac{7}{12}$

3. 点 O 为△ABC 的重心，且 $OA\perp OB$，$AB=6$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为____________. 72

二、典例研究：

例 1、在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB // DC$，$AB=2$，$BC=1$，$\angle ABC=60°$. 点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上，且$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$，求$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的值.

解析：取$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$为一组基底，

则$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$，

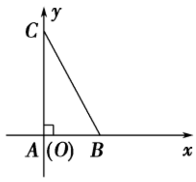
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\frac{5}{12}\overrightarrow{BA}=-\frac{7}{12}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$，

$\therefore\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{7}{12}|\overrightarrow{BA}|^2-\frac{25}{18}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}|\overrightarrow{BC}|^2$

$=\frac{7}{12}\times4-\frac{25}{18}\times2\times1\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{29}{18}$.

例2、已知$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，$|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{t}$，$|\overrightarrow{AC}|=t$，若点$P$是$\triangle ABC$所在平面内的一点，且$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{4\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，求$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的最大值.

答案：建立如图所示坐标系，则



$B\left(\frac{1}{t},\ 0\right)$，$C(0,\ t)$，$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{t},\ 0\right)$，$\overrightarrow{AC}=(0,\ t)$，

$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{4\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=t\left(\frac{1}{t},\ 0\right)+\frac{4}{t}(0,\ t)=(1,\ 4)$，$\therefore P(1,\ 4)$，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\left(\frac{1}{t}-1,\ -4\right)\cdot$

$(-1,\ t-4)=17-\left(\frac{1}{t}+4t\right)\leqslant 17-2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot 4t}=13$，

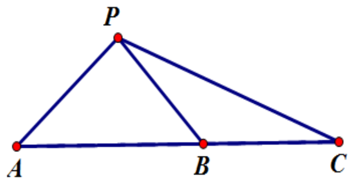
当且仅当 $4t=\frac{1}{t}$，即 $t=\frac{1}{2}$时(负值舍去)取得最大值 13.

例 3、已知AB为圆O的直径，M为圆O的弦CD上一动点，$AB=8$，$CD=6$，求$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$的取值范围．$[-9,0]$

三、巩固训练：

1. 在ΔABC中，已知$AC=4$，$C=\frac{\pi}{4}$，$B\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，点$D$在边$BC$上，且$AD=BD=3$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$________________. 6

2. 如图，ΔPAC中，B在边AC上，且$AB=BC=1$，$\angle APB=90^\circ$，$\angle BPC=30^\circ$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=$________. $-\frac{4}{7}$



3．已知$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$是单位向量，$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\left(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}\right)\cdot\vec{c}$的最大值为____________.

$2+\sqrt{2}$.

4. 已知向量$\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x,\sin x)$，$\boldsymbol{c}=(\sin x+2\sin\alpha,\cos x+2\cos\alpha)$，其中$0<\alpha<x<\pi$.

（1）若$\alpha=\frac{\pi}{4}$，求函数$f(x)=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$的最小值及相应$x$的值；

（2）若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，求$\tan 2\alpha$的值．

解：（1）∵$\boldsymbol{b}=(\cos x,\sin x)$，$\boldsymbol{c}=(\sin x+2\sin\alpha,\cos x+2\cos\alpha)$，$\alpha=\frac{\pi}{4}$，

∴ $f(x)=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\cos x\sin x+2\cos x\sin\alpha+\sin x\cos x+2\sin x\cos\alpha$

$=2\sin x\cos x+\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$. ······························2 分

令$t=\sin x+\cos x(0<x<\pi)$，则$2\sin x\cos x=t^2-1$，且$-1<t\leqslant\sqrt{2}$.

则$y=f(x)=t^2+\sqrt{2}t-1=(t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2-\frac{3}{2}$，$-1<t\leqslant\sqrt{2}$.

∴$t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$y_{\min}=-\frac{3}{2}$，此时$\sin x+\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ···············5 分

由于$0<x<\pi$，故$x=\frac{11\pi}{12}$.

所以函数$f(x)$的最小值为$-\frac{3}{2}$，相应x的值为$\frac{11\pi}{12}$. ··················7 分

（2） ∵$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，

∴ $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x=\cos(x-\alpha)$. ···············9 分

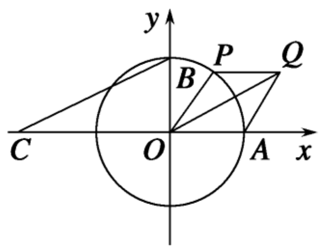
$\because 0<\alpha<x<\pi$，$\therefore 0<x-\alpha<\pi$，$\therefore x-\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

$\because \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，$\therefore \cos\alpha(\sin x+2\sin\alpha)+\sin\alpha(\cos x+2\cos\alpha)=0$.

$\therefore \sin(x+\alpha)+2\sin 2\alpha=0$，$\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})+2\sin 2\alpha=0$. ……………12 分

$\therefore \dfrac{5}{2}\sin 2\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha=0$，$\therefore \tan 2\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. ……………………14 分

5．如图所示，A，B 分别是单位圆与 x 轴、y 轴正半轴的交点，点 P 在单位圆上，$\angle AOP=\theta(0<\theta<\pi)$，$C$ 点坐标为$(-2，0)$，平行四边形 $OAQP$ 的面积为 S.



(1)求$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}+S$的最大值；

(2)若 $CB//OP$，求$\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$的值.

解　(1)由已知，得$A(1，0)$，$B(0，1)$，$P(\cos\theta，\sin\theta)$，

因为四边形 $OAQP$ 是平行四边形，

所以$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=(1，0)+(\cos\theta，\sin\theta)=(1+\cos\theta，\sin\theta)$.

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=1+\cos\theta$.又平行四边形 $OAQP$ 的面积为

$S=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OP}|\sin\theta=\sin\theta$，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}+S=1+\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$.

又 $0<\theta<\pi$，

所以当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}+S$的最大值为$\sqrt{2}+1$.

(2)由题意，知$\overrightarrow{CB}=(2，1)$，$\overrightarrow{OP}=(\cos\theta，\sin\theta)$，

因为 $CB//OP$，所以 $\cos\theta=2\sin\theta$.

又 $0<\theta<\pi$，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，解得 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{3}{5}$.

所以 $\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin 2\theta\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos 2\theta\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$