

基于优化学生学习方式的数学阅读指导*

——以数学教材为例

/ 何 睦

【摘 要】教材是学生进行数学阅读的重要文本,通过指导学生阅读教材的章节起始内容、数学概念和定义、数学定理和公式、例题和习题,能有效地培养学生阅读教材的能力,提高学生的自主学习性,提升学生的数学核心素养。教师要不断加强对数学教材的研究,加强对学生学习的研究,要将对教材阅读的指导上升到“课”的高度加以研究。

【关键词】数学阅读;学习方式;数学教材;教材阅读指导

【中图分类号】G633.6 **【文献标志码】**A **【文章编号】**1005-6009(2018)75-0039-04

【作者简介】何睦,江苏省张家港市沙洲中学(江苏张家港,215600)教师,一级教师。

优化学生数学学习方式,是新课程改革的重要目标和内容。学生学习方式是否得到了转变与优化,是衡量新课程改革是否成功的重要标志。在知识更新频繁且日益加快的今天,学校教育更要教给学生获取知识的方法,优化学生的学习方式势在必行。相关研究表明,教师指导在影响学生学习方式中占有重要比重。^[1]笔者在多年的教学实践中,一以贯之地将“优化学生的数学学习方式”作为数学教育教学工作的重心和落脚点,“数学阅读指导”即是笔者优化学生数学学习方式的一种尝试。

谈及数学阅读,我们须树立广义的阅读观。广义的阅读,是指把阅读作为学习其他内容、为生活做准备以及参与公共活动的工具。国际知名的 PISA 测试将阅读素养的测评作为其重要组成部分,它将阅读测试涉及的情境分为个人的、公共的、教育的、职业的四种^[2],其中教育的情境指为了学习新知识而阅读,是为了获取信息来完成某项学习任务而开展的阅读。阅读数学文本所用的方法与文科阅读有共

性之处,但由于学科特征,这就使得我们必须以“数学的方式”来阅读数学文本。因此,数学阅读的过程应是在教师指导下,学生按照一定方式、方法,对数学文本进行阅读、学习、思考与质疑的过程。在数学阅读和文本信息获取的过程中,不仅能有效提高学生的学业成绩、丰富学生的数学学习方式,更重要的是学生的学习能力和学习自主性得到了极大的提升。可供阅读的数学文本有很多:数学教材、习题、论文、科普读物、人物传记等等。数学教材是实现国家课程目标、实施数学教学的重要资源,笔者在多年的教学实践中就“如何指导学生进行数学教材的阅读”进行了不断的实践与反思,现将其整理成文,敬请指正。

一、指导学生阅读章节起始内容

无论是哪个版本的教材,教科书在每章的起始都有一段话,还有与内容配套的图片,有的教材还有与之相应的名人名言和诗词。这些内容与一般教学内容不同,不是以单独课题出现,而是放在一章之前,成为一章的起始内容。

* 本文系江苏省教育科学“十三五”规划 2018 年度青年专项重点资助课题“基于学生数学学力发展的教学实践与校本课程开发研究”(课题编号:C-a/2018/02/17)的研究成果。

以苏教版高中数学教科书必修5第三章“不等式”的章节起始内容为例。

教材首先给出了一张图片,图片呈现的是一次帆船比赛:大赛组委会根据船队所用的时间长短来决定比赛的名次。

【阅读指导】请学生思考:这幅图片和本章要研究的主题“不等式”有怎样的关系?——这幅图片中隐藏着本章要研究的重要模型——不等关系(不等式)。我们生活在大千世界里,无论是现实世界还是日常生活中都有大量的不等关系(不等式),图片展现的就是一个在我们身边再平常不过的例子:比赛排名。

紧接在图片之后,是国际微分几何大师陈省身先生的一句名言:“我们欣赏数学,我们需要数学。”

【阅读指导】请学生思考:这句名言与本章要研究的主题“不等式”有着怎样的关系?——再一次揭示我们本章要研究的是能刻画现实世界和日常生活的一个重要模型。

在第一节“不等关系”开始之前,教材还呈现了这样几段文字:

“在现实世界和日常生活中,存在着大量的不等关系,不等式是刻画不等关系的数学模型。

我们已利用不等式的基本性质求得一元一次不等式 $ax+b>0$ 的解集,同时,研究了一元一次不等式 $ax+b>0$ 与一次函数 $y=ax+b$ 及一元一次方程 $ax+b=0$ 三者之间的关系。

当我们面临新的不等式时,例如,一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 、二元一次不等式 $ax+by+c>0$ 等,我们自然会想到,曾经用过的数学思想方法还能继续运用吗?”

【阅读指导】请学生思考:从这段章头语中我们有哪些启发和收获?在教材上写下你的收获和启发。

——从研究内容来看,本章要研究的是不等式,会涉及解一元二次不等式等问题;从研究方法来看,章头语暗示我们可应用函数与方程、类比等数学思想方法对一元二次不等式及其他相关问题加以研究。章头语是本章研究内容与研究方法的有机融合。

自然,有老师会对学生是否能够达到这一阅读层次提出质疑,笔者认为,也许学生一开始理解得不会那么到位,但有思考就有收获,当学生学习完整个章节后,对章节起始内容会逐步形成更为深刻的理解,这些思考的方式和经验也势必会对其他章节起始内容的阅读带来启发。

二、指导学生阅读数学概念和定义

数学概念和定义是数学的重要组成部分。在指导学生阅读数学概念和定义(含约定式定义)时,不仅要指导学生学会从概念和定义中抓住关键词,还要引导学生对概念和定义产生的必要性和合理性进行有益的思考和质疑。

以“等差数列”这一核心概念的定义为例:“从第二项起,每一项与前一项的差都等于同一个常数的数列称为等差数列,这个常数称为该等差数列的公差,用 d 表示。”

【阅读指导】请学生思考以下问题。

问题1:等差数列的定义中,有哪些关键词?

问题2:减法是常见的四则运算之一,类比等差数列的定义,你还能提出新的概念和定义吗?

问题3:等差数列除了这种定义方式之外,你认为还有别的定义方式吗?如有,请写出你的成果,并与之进行比较,哪一个更为合理。

——也可定义为前一项减去后一项,但定义的叙述方式显得啰唆。若该数列是无限数列,每一项与后一项的差都等于同一个常数的数列称为等差数列;若该数列是有限数列,则从首项至最后第二项,每一项与后一项的差都等于同一个常数的数列称为等差数列。虽然也合理,但确实没有教材来得那么简洁。

再以阅读教材“集合子集”的一个重要性质为例:“我们约定,空集是任何集合的子集。”

【阅读指导】请学生思考以下问题。

问题1:为什么要有这样的约定?(探讨其必要性)

——从子集定义可知,子集定义中所涉及的集合不包括空集。为了完善子集定义,约定空集是任何集合的子集是必要的。

问题2:为什么可以有这样的约定?(探讨

其合理性)

——由子集的定义可知,显然有任何一个集合是它本身的子集,但是上述这个结论中的“任何一个集合”,也是不包括空集的,只有规定了“空集是任何集合的子集”,才真正使每一个集合(包括空集)都成立。

在指导学生阅读教材概念和定义时,可给学生提供一些思考的角度和方式。譬如上述两个案例中提到的,“这个定义中,有哪些关键词需要注意?”“类比这个概念和定义,你还能提出新的概念和定义吗?”“除了教材所给的定义方式之外,还有别的定义方式吗?试比较你的定义和教材定义的优劣。”“为什么要作出这样的约定?”“为什么可以作出这样的约定?”等等问题。通过提供一些可操作的方法,帮助学生不断地积累阅读、学习、质疑概念和定义的经验。

三、指导学生阅读定理和公式

数学定理和公式是中学数学学习的重要内容。在指导学生阅读教材中的定理和公式时,可从以下几个方面进行阅读指导:第一,定理和公式使用的条件是什么?结论是什么?第二,定理和公式有哪些等价变形?第三,定理和公式的证明方法有哪些?每个证明方法各体现了怎样的数学思想方法?第四,定理和公式有怎样的应用?第五,该定理和公式与其他定理、公式之间有怎样的联系?第六,该定理和公式为何这样命名?等等。以“基本不等式”这一公式的阅读指导为例。

【阅读指导】请学生思考以下问题。

问题1:该公式使用的条件是什么?结论是什么?

问题2:该公式可有哪些等价变形形式?

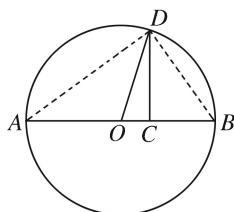
问题3:该公式有哪些证明方法?不同的证明方法各自体现了怎样的数学思想方法?

——证明 1: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立。

证明 2: 要证 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 只要证 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 只要证 $a-2\sqrt{ab}+b \geq 0$, 只要证 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ 。因为最后一个不等式成立, 所以 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 成立, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立。

证明 3: 对于正数 a, b , 有 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$, 即 $a-2\sqrt{ab}+b \geq 0$, 得 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 即 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。

证明 4: 如图 1, 已知 AB 为圆 O 的直径, D 是圆 O 上异于 A, B 的任意一点, 过 D 作 $DC \perp AB$, 垂足为 C , 连接 DO , 设 $AC=a, BC=b$, 则易得 $DO = \frac{a+b}{2}, DC = \sqrt{ab}$ 。若



(图 1)

C, O 两点重合, 即 $a=b$ 时, $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$; 若 C, O 两点不重合, 即 $a \neq b$ 时, $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ 。综上, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 成立, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立。

证法 1 和证法 3 采用的是直接法, 证法 2 则采用了分析法, 而证法 4 结合图形, 利用数形结合的方法给出了公式的几何证明。

问题 4: 该公式有什么样的应用?

——可用来求两个正数和或积的最值或范围。

问题 5: 为什么该公式称为基本不等式? 基本在哪里?

——和与积是数学运算中最为简单的两种运算形式, 该公式体现的恰恰是两个正数的和与积的不等关系, 因此称为基本不等式。

四、指导学生阅读教材的例题和习题

教材例题与习题的选编是教材编写过程中的重要一环, 苏教版教材从 2004 年至今先后经历了 4 次大规模的修订, 其中例习题的修订力度最大, 可见教材编写团队对教材例习题选编的高度重视。笔者以为, 教材例题不仅要

思,可以学到不少研究问题的逻辑、思路和方法。因此,教师有必要对教材例习题的阅读进行有效的指导。

对教材例题的阅读指导必须凸显其示范性,分析并明确每一个例题的设置意图,可从“这个例题想告诉我们什么?”“你从例题的解答过程中有什么收获?”“如何规范地进行这一类问题的作答?”等方面入手。以苏教版必修1“函数的奇偶性”例题为例。

例6 判定下列函数是否为偶函数或奇函数。

(1) $f(x)=x^2-1$; (2) $f(x)=2x$; (3) $f(x)=2|x|$;
(4) $f(x)=(x-1)^2$ 。

【阅读指导】请学生思考以下问题。

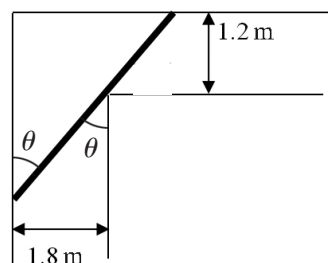
问题1:这个例题设置的意图是什么?

问题2:通过例题的解答,你有什么收获?

——利用定义来证明一个函数是否具有奇偶性的一般步骤:首先研究函数的定义域,其次利用定义加以判断。本题的前三个函数都是具有奇偶性的函数,直接写出 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系即可得证,而第四个函数是非奇非偶函数,则需要举反例说明。

问题3:如何规范地进行作答和书写?

对教材习题的阅读主要凸显其拓展性和探究性,可从“本题的结论能否作进一步推广?”“针对本题的条件与结论,能否提出其他相似的问题?”“能否就本题的条件和模型加以变化,变更为其他条件或模型?”等等。教材可以拓展和探究的问题有很多,以苏教版必修4一道“直角走廊”问题为例说明:一铁棒欲通过



(图2)

如图2所示的直角走廊,回答下列问题。

(1) 证明棒

$$\text{长 } L(\theta) = \frac{9}{5\sin\theta} + \frac{6}{5\cos\theta};$$

(2) 求 $L(\theta)$ 的最小值(用计算器或计算机);

(3) 解释(2)中所求的 L 是能通过这个直角走廊的铁棒长度的最大值。

【阅读指导】请学生思考以下问题。

问题1:该问题如何解答?

问题2:该问题能否作进一步的拓展?

——该题是一道非常有趣的应用题,形式新颖,又贴近生活实际,我们可以进一步提出新的问题:题目中展现的是一个不等宽的直角走廊,如果换成等宽直角走廊,情况有何变化?若将直角走廊换成 120° 的折线形走廊、圆角走廊,将木棒变成有厚度的平板小车(或木板),情况又是怎样的呢?

教材可供阅读的部分还有很多,限于篇幅,不再一一赘述。为了进行更为有效的数学教材的阅读指导,笔者以为可加强以下三个方面的研究。

第一,教师要加强对数学教材的研究。教师对教材的理解和把握能力,会直接影响学生阅读数学教材的质量和层次。因此,数学教师要加强学习,特别是加强针对教材研究的学习,可搜集数学教育类期刊中的相关论文、购买针对教材进行研究的数学教育专著进行学习,可多参与各类教师教育培训和社会共同体活动等等。通过学习,掌握教材概念和定义的内涵与外延,深刻理解教材公式和定理的来龙去脉,明确教材章节起始内容的丰富内涵,把握教材例习题的编写意图及其示范、拓展、探究等价值,如此才能有的放矢,对学生进行教材的阅读给予更多专业化的指导。

第二,教师要加强对学生学习的研究。教师在对学生进行阅读指导时,要加强对学生学习的研究,要对不同学习能力的学生提出不同的要求,并拿出不同的指导方案;要对学生教材阅读的进程加以监控和测评,可考虑经常举办阅读教材能力的相关竞赛,以激发学生参与教材阅读的积极性和兴趣,与此同时,考虑到学生进行教材阅读主要利用假期或周末时间,有条件的学校和教师可建立教师专用辅导QQ群或微信群,及时辅导和追踪学生的教材阅读

(下转第45页)

模态学习和多媒体学习经常相伴相随。

3. 创设真实情境。

要想提高学生英语的核心素养即语言能力、文化意识、思维品质和学习能力,必须在大量的真实的情境中去实践,去感悟,去纠正,去提升,如果只是一味地说教、大量的题海战术、枯燥的语法训练,其结果只能是“教师苦教、学生苦学”,事半功倍。所以,我们必须提高学生学习兴趣,通过各种手段与方式刺激他们的大脑皮层,使他们能较长时间处于兴奋与好奇状态,这样寓教于乐,他们就会学得深、记得牢、用得活。而这些情境创设中,“看”是最容易吸引学生的。

比如在课堂的导入阶段,设置要非常精巧,能一下子扣住学生的心弦。可以多使用视频、图片、图像、漫画、思维导图,内容方面,可以是故事、歌曲、问题、创设的情境等等,让学生身临其境,使他们的心和兴奋点一下子被抓住,让他们全神贯注于马上要讲的内容,带着很强的好奇心与期望值去关注教师所讲的每一个细节,真正达到以教师的激情去点燃学生的激情,进而创设优良的教学情境,起到先声夺人、引人入胜的效果,正如特级教师于漪老师所说:“在课堂教学中要培养、激发学生的兴趣,首先应抓住导入新课的环节,一开始就把学生牢牢地吸引住。”

(上接第42页)

进展,解决学生在阅读教材过程中产生的困惑和疑难。

第三,教师要将对教材阅读的指导上升到“课”的高度加以研究。笔者只是借助自身的实践体会和经验分享了自己平时指导学生阅读数学教材的一些做法,却未能上升到课的高度进行研究。既然对教材阅读加以指导能在很大程度上丰富学生的学习方式、提升学生的学习能力和学习自主性,如若能将教材阅读的指导上升到课的高度进行研究,形成“数学教材阅读指导课”,那么它的价值可以得到更程度的体现和彰显。因此,虽然笔者这几年在指

在课堂过程中,可以让学生通过自主学习、小组合作等方式,自己绘制出比较抽象文本的思维导图,再通过媒体展示、同伴互评互改等方式将复杂抽象问题可视化,形象化,很多疑难问题就会迎刃而解。

例如:高中英语中的虚拟语气是学生非常头疼的语法,如果按照传统的讲授方法,即先告知学生基本用法,然后大量造句,学生学得很累,效果很差,不容易掌握。笔者教学时,先让学生“看”一则关于汶川大地震的视频报道,然后根据视频内容编写一段文字让学生“看”,其中设置了各种各样的虚拟句式:假设你是汶川某一中学的学生,你经历的那段历程。学生就自然而然地进入了状态,会主动考虑动词形式,即使不会,教师点一下就明白了,印象非常深刻。因此,教师不要孤立地讲授某一语法,应放在情境中让学生去感悟。

总之,教师要与时俱进,充分重视与开发利用好“看”,让它与听、说、读、写一样成为师生的习惯,在听、说、读、写过程中有机地穿插“看”,借助图片、符号、表情、动画、视频、流程图等非语言手段提高理解与表达效果,让英语语言学习不再枯燥抽象,让教师的教与学生的学更加形象生动,让我们中学的课堂更加灵动、高效。■

导学生阅读数学教材上做出了一些有益的探索和实践,但一门新的课程出现,势必还要考虑诸多因素,关于“数学教材阅读指导课”的教学研究仍是一个系统工程,还有很多问题值得我们进行深入探讨。■

【参考文献】

[1]李本友,李红恩,余宏亮.学习方式转变的影响因素、途径与发展趋势[J].教育研究,2012(02).

[2]陆璟.PISA 测评的理论和实践[M].上海:华东师范大学出版社,2013.