例谈高中数学教学中整体思维的应用

任晓松

（苏州市吴江区教研室　215200）

数学中的分析，必然要着眼于一个一个的局部，但是任何局部都不是问题本身.在所有局部分析清楚以后，也不自然导致对问题本身的认识.格式塔心理学派的核心观点是："整体大于部分之和"，这"大于"的部分才是认识问题的最后关键.为了使这"大于"的部分得以形成，我们必须持有整体思维.即在思维中尽量保持联系的、全面的、辩证的观点，在思维的最后则必须形成整体认知.

下面结合实例从五个方面谈谈在高中数学教学中如何应用整体思维.

1　整体观察，凸显本源

例 1　若 a,b,c 都是区间 $(0,1)$ 内的实数，求证 $a(1-b),b(1-c),c(1-a)$ 不可能全部大于 $\frac{1}{4}$.

思考与分析　如果单独看，$a(1-b),b(1-c),c(1-a)$ 中的任何一个都可以大于 $\frac{1}{4}$，从任何一个入手都无法推出所要的结论.而若注意到所给的三个式子之间有密切的交叉联系，因此放在一起做全面的分析，得如下解法：

假设 $a(1-b),b(1-c),c(1-a)$ 全部大于 $\frac{1}{4}$，则 $a(1-b)\cdot b(1-c)\cdot c(1-a)>\frac{1}{64}$.而 $a(1-b)\cdot b(1-c)\cdot c(1-a)=a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c)\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$，这与假设矛盾.

一般地，问题的合理性或者说思维的无矛盾性都是基于整体而言的，整体的和谐才是无矛盾.任何矛盾也都不是对单一元素而言的，至少牵扯到矛盾的双方.由此知在实施反证法时，构造矛盾的一个特别有效的策略就是"整体构造".

2　整体认识，暂代细节

例 2　不等式 $\log_a x-\ln^2 x<4(a>0$ 且 $a\neq1)$ 对任意 $x\in(1,100)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

思考与分析　如果认为此题中的不等式是超越不等式，则思维就陷入盲区.联系到题中还有 $\ln x$，如果把 $\log_a x$ 变形为 $\frac{\ln x}{\ln a}$ 则可使整个式子在形式上得以统一.对于变形后的不等式 $\frac{\ln x}{\ln a}-\ln^2 x<4$，只要将其看作以 $\ln x$ 为变量的二次不等式，则问题解决的整体思路就非常清晰了.

接下来的具体操作中，注意到 $x\in(1,100)$ 从而 $\ln x\in(0,\ln100)$，即变量 $\ln x$ 为正数，从而将不等式进行参变分离得 $\frac{1}{\ln a}<\frac{4}{\ln x}+\ln x$.注意这里分离出 $\frac{1}{\ln a}$ 而不是 $\ln a$，更不是分离 a，一是这样的结构最为简单明晰，不等式的右边是基本不等式的结构.二是在运算过程中，把 $\frac{1}{\ln a}$ 看作是一个整体，通过求出其整体的取值范围 $\frac{1}{\ln a}<4$，从而求出 $a\in(0,1)\cup\left(e^{\frac{1}{4}},+\infty\right)$.这是具体运算上的一种整体规划，先求 $\frac{1}{\ln a}$ 的范围，再求实数 a 的范围更加容易.

上述过程中有对式子结构的整体分析，有对解题过程的整体预见，后者尤其带给我们极为愉悦的体验.当我们认为此问题是二次不等式问题而非超越不等式以后，整个局面就彻底转变.后面的"参变分离"，我们并没有分离出 a 来，而是分离出 $\frac{1}{\ln a}$，这也是基于对解题过程的整体预见.

3　整体对比，凸显变化

例 3　已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函

万方数据

数，满足 $f(x+2)=f(x)$，且当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=x^2-1$，$g(x)=\log_3 x$，则函数 $h(x)=f(x)+g(x)$有__________个零点.

思考与分析 此题根据数形结合很容易得到答案是 2，看似观察图形非常简单可以获得答案. 事实上我们手绘的图形比较粗略，图形的作用更多是给我们思维上的启示，但仅局限于图形会限制我们的思维. 在此题中，我们适当对条件加以变化，如把底数由 3 改为 1.1，即 $g(x)=\log_{1.1}x$，假如我们仅仅局限用图形来分析的话，对数函数图形的趋势不变，因而看似答案应该是不会有所变化的，但事实并非如此. 对于图形问题的深入分析，我们必须借助于代数分析. 要透彻地解决这个问题，我们不妨把这个问题回归到更一般的形式，把底数用参数 a 来替代，即研究函数 $g(x)=\log_a x(a>1)$时，是否答案始终为 2 呢？此时 $h(x)=x^2-1-\log_a x(a>1)$，$h'(x)=2x-\frac{1}{x\ln a}$，故 $1<a\leqslant\sqrt{e}$时，$h'(x)\leqslant 0$，即此时 $h(x)$在$(0,1]$上单调递减，即 $x\in(0,1]$时，$h(x)\geqslant h(1)$，由此可得，$x\in(0,1]$时 $x^2-1\geqslant\log_a x$，由此可知在 $1<a\leqslant\sqrt{e}$时，零点的个数为 1，即前面底数为 1.1 时，答案也不为 2.

将特殊的问题还原其一般性，这让我们能站在更高的高度来观察问题的全貌，这也是整体思维处理的一种重要方式. 把问题一般化，是一个还原问题全貌的过程，我们通过把握细节的变化，从而对原来的问题有更加全面、缜密、细致的认识和体会. 例 3 问题在课堂教学中，我们可以通过几何画板的演示，通过对参数 a 的变化，而演示图形的变化. 这个演示过程，能让学生有整体的直观感受，可以清晰的观察到零点个数从 2 个到 1 个的变化. 但几何画板中呈现的变化仅是让学生产生直观，如何内化为严谨的逻辑推理，就需要我们用代数的方法去分析、推理、论证. 形数必须结合，依托于数据的分析的图形才是全面的、整体的，我们的分析和思考才能做到因微而准，因微而细.

4 整体入手，以静制动

例 4 已知 $n\in\mathbf{N}^*$，数列$\{a_n\}$的各项均为正数，前 n 项和为 S_n，若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_n=\frac{a_n^2+n}{2}$恒成立，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

思考与分析 此题思路非常明确，由 $2S_n=a_n^2+n$，可得当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+n-1$，作差，化简可得$(a_n-1)^2-a_{n-1}^2=0$，即 $a_n-a_{n-1}=1$ 或 $a_n+a_{n-1}=1$. 同时，对于给定恒等式中，令 $n=1$、2，可解得 $a_1=1$ 和 $a_2=2$. 此处可能有一个思维的误区，即根据 $a_1=1$，$a_2=2$ 得 $a_1+a_2=3$ 否定后一个关系式 $a_n+a_{n-1}=1$. 但是，这样的“否定”是错误的. 此错误的产生又是基于一个错误的整体认识，即对于逻辑连接词“或”的错误认识，它不是“对于任意的正整数 n，都有 $a_n-a_{n-1}=1$”，或“对于任意的正整数 n，都有 $a_n+a_{n-1}=1$”，而是“$a_n-a_{n-1}=1$ 或 $a_n+a_{n-1}=1$”在具体 n 值时的二选一. 要证 $a_n+a_{n-1}=1$ 恒不成立，即实际上不存在任何的 n 值使得它成立. 证明“不存在”，我们想到了反证法. 为此必须找到一个有力的抓手，由于 $a_1+a_2=3$，因此“设 $n_0(n_0>2)$ 是满足上式最小的正整数，即 $a_{n_0}+a_{n_0-1}=1$”. 这个最小的 n_0 把数列分割成前后两段，前面一段全部满足 $a_n-a_{n-1}=1$. 由于 $a_{n_0}+a_{n_0-1}=1$ 且各项为正数，故 $a_{n_0-1}\in(0,1)$，而 $a_{n_0-1}-a_{n_0-2}=1$，可得 a_{n_0-2}为负数，这与数列各项均为正数相矛盾. 由此可知原假设错误，即数列$\{a_n\}$只满足 $a_n-a_{n-1}=1(n\geqslant 2)$，故数列$\{a_n\}$为等差数列，通项公式为 $a_n=n$.

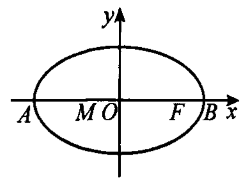
在整体思维中，从动态的环节中如何找到不变的，以静制动是其思维方式的一种重要体现. 在例 4 中，数列的项是一个变化的过程，在无穷项的数列中的每一项都要对两种递推关系进行二选一，其不确定性给思维带来了巨大的困难. 但把该数列看成一个整体，从这个大的视角出发我们很容易思考到在首个“等和关系 $a_{n_0}+a_{n_0-1}=1$”之前都是“等差关系 $a_n-a_{n-1}=1$”，这就是以静制动思维的体现. 动态和静态是一对矛盾的统一体，动态呈现问题各个环节之间的相互联系、相互制约的关系，而我们能从动中找到不动，则可以从更高的维度分析、处理他们之间的关联，为解决问题找到突破口.

5 整体运算，把握结构

例 5 如图，平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，$M(-1,0)$. A，B 分别是椭圆 E 的

万方数据

左、右顶点，F 是椭圆的右焦点. 若 $P(x_0, y_0)$ 是椭圆上不同于 A, B 的任一点，求 P 处的切线 l 方程.



思考与分析 此题的解题思路是设切线 l 的斜率 k，得到 l 方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 代入椭圆 E 的方程，消去 y(或者 x)，再根据直线 l 是椭圆 E 的切线，计算所得方程的 $\Delta=0$ 即可. 但学生往往不能顺利解答，因为在联立所得方程的展开项非常多，容易算错(或者写错). 同时由于项数过多，导致接下去学生无法有效的计算 Δ. 这里学生出现的计算问题，主要在于学生没有明晰消去 y 后，所得方程是关于 x 的一元二次方程的代数结构. 如果能明确把握方程的结构，那么在运算过程中可把 $y-y_0=k(x-x_0)$ 改写成 $y=kx-(kx_0-y_0)$ 再代入. 这个小小的改变，使得展开时按 x 项降次排列变得非常自然、简便，极容易按照二次项、一次项和常数项写成：

$(4k^2+1)x^2+8k(y_0-kx_0)x+4(y_0-kx_0)^2-4=0$，

再考虑要计算该二次方程的 Δ，因此常数项不宜展开，考虑结构的关系，$64k^2(y_0-kx_0)^2$ 在常数项不展开的过程中可相消，有效减少运算量. 计算 $\Delta=0$，也必须明晰我们解答的指向是求解切线 l 的斜率 k，因此化简为关于 k 的一元二次方程 $(4-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+(1-y_0^2)=0$，再结合 $P(x_0, y_0)$ 是椭圆上的一点，代换该方程的二次项和常数项系数，得 $4y_0^2k^2+2x_0y_0k+\frac{x_0^2}{4}=0$，此为完全平方，故可求得斜率 $k=-\frac{x_0}{4y_0}$，由此可得切线 l 方程为 $x_0x+4y_0y-4=0$.

此解答中，可以看到算法的作用非常大，假如按公式展开，没有整体的设想，会给运算造成极大的困扰. 数学需要运算，但是在运算之前首先要思考一下"算理"和"算法"，尽量简化运算，这就必须从整体对解答进行预设，合理的预设又来源于对题目的解答有清晰的分析和思考. 在此过程中，要考虑代数式的结构，考虑结果的导向以及考虑数据的有效代换，这些都为简化运算、提高运算能力起了很大的作用. 这里的整体思维不仅能减少运算量，更为关键地是培养学生整体分析、把握问题的能力，从而有效提升其数学运算素养.

以上五个例子，从不同的侧面来谈及高中数学教学中整体思维的引导. 坚持整体思维的教学有助于学生逐步形成整体意识，从而养成学生能全面的、从全局考虑问题的习惯. 这让学生不仅只看到数学问题的局部，更重要的使其会分析整体与局部、整体与结构的关系，从而把握问题的本质和规律. 整体意识有助于学生用全局观念处理问题，从多个方面、多个维度研究问题，避免片面性，这对学生的学习和今后的工作都有重要的作用.

(上接第 46 页)

本题通过给定一个圆周角的图示，要求学生读懂图中的信息，探索并尝试表示特殊位置时阴影面积的值. 在运动变化的过程中寻找变与不变，以此来考查学生运用图形描述、分析解决问题的直观想象和逻辑推理的数学素养.

在新时代背景下，北京高考数学开启了高考改革的新征程. 试卷以立德树人为立足点，着力于数学知识和方法，数学文化和应用的考查，回归学生发展，回归数学本质，回归教育规律，导向中学对"具备自觉的数量观念的人"、"具备严密推理逻辑的人"、"具备高度抽象概括的人"、"具备一丝不苟、精益求精作风的人"的"四具备"人才的培养，引导教学在核心概念和主干知识的掌握、数学学科本质的理解、知识联系和知识网络的建构、数学思想方法的领悟、数学模型的建立和问题解决能力的培养、数学素养的达成等六个方面下功夫，用立德树人铸魂，熔铸于理性思维和人文精神，努力打造绿色高考新形态.

参考文献

[1]北京教育考试院. 2019 年普通高等学校招生全国统一考试北京卷考试说明[M]，北京：开明出版社，2018
[2]中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 北京：人民教育出版社，2018

万方数据