境与问题相连，通过创设不同的认知活动，让学生在日积月累的数学学习中，不断地进行“数学认知”，积累数学活动的经验，切实培养起数学的核心素养．

（本文系福建省中小学名师工作室专项课题《基于 APOS 理论的高中概念教学实践与研究》（编号：GZS191007，主持人：李云杰）的研究成果之一）

依托解题教学，促进深度思考

李新岳　　福建省仙游第一中学（351200）

在解题教学中，不少教师过于注重题型套路的归纳与总结，喜欢技巧与方法的展示，学生解题中的思维障碍、易错点等没有得到应有的关注．即使是学生解题过程正确，也缺乏必要的反思与升华．这种解题教学，“占得过多，让得过少”，学生被牵着鼻子走，造成只要题目稍微新颖变化些，许多学生就无从下手．

解题教学的根本目的在于培养学生的深度思维能力和数学素养．余文森教授提出，学生的学习过程是一个“阅读——思考——表达”（“读思达”）的深度交融的过程．思考即信息加工，包括思维、想象、直觉等；表达即信息输出，包括口头表达、书面表达，涉及知识的呈现、迁移、应用等．就象学生进食一样，一定要经过咀嚼、吞咽、消化、吸收这几个环节和程序，食物才能转化为人体所需的营养元素．

解题过程是一种学习与探究过程，是“智力搏斗”的过程，要让学生经历：其初百思不得其解，其次经由深思、思有所悟、若隐若现，其后屡经尝试，运用新思路，寻找新方法，以至于得到新启发从而恍然大悟．这是一个从知之少到知之多、思之浅到思之深的过程，因而教师不能越俎代庖，解题教学不能以“正确答案”为唯一目标，不能只重结果不重过程．

在解题教学中，教师应该始终把学生的思维活动作为关注的焦点，立足学生的真实问题和已有经验，把学生出现的困惑作为教学的出发点，析其所惑；要鼓励学生充分表达出他们解题真实的思维过程，指导学生如何寻找题眼（即解决问题的突破口），当学生遇到解题障碍时引导“怎么想”，怎么跨过障碍，要让每个解题念头、想法自然、合理．对关键或学生容易卡壳的步骤，缓慢细化些，多铺台阶，循序渐进．教师还要引导学生比较各种解法的优劣以及适用范围，提炼思想方法，渗透数学思维和数学核心素养．本文拟以一道习题的解题教学为例，阐释笔者的实践与认识．

1 习题呈现

ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ．已知 $c\cos B+b\cos(A+B)=0$ ，BD 是 AC 边上的中线，且 $BD=1$，求 ΔABC 面积的最大值．

2 过程实录与即时评析

学生从已知条件 $c\cos B+b\cos(A+B)=0$，可得 $\sin C\cos B-\sin B\cos C=0$，易得 $b=c$ ．接下来，不同的学生解法开始出现分化．

学生 1：设 $AB=AC=2x$， $AD=x$， $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=2x^2\sin A$ （*），想消去 $\sin A$，但陷入困难．

教师：上式中含有两个变量，通常需化为一元目标函数，$\sin A$ 能转化成什么？（可转化为 $\cos A$），$\cos A$ 可用什么表示？

学生 1：在 ΔABD 由余弦定理得：

$$\cos A=\frac{4x^2+x^2-1}{4x^2}=\frac{5x^2-1}{4x^2},$$

$$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-(\frac{5x^2-1}{4x^2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{16}{9}-(3x^2-\frac{5}{3})^2}}{4x^2},$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2x\cdot\frac{\sqrt{\frac{16}{9}-(3x^2-\frac{5}{3})^2}}{4x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{9}-(3x^2-\frac{5}{3})^2},$$

于是当$3x^2=\frac{5}{3}$时，ΔABC面积有最大值$\frac{2}{3}$.

即时评析:“读思达”教学法注重“针对性”与“提升性”，在学生学习的“悱愤”状态，教师要适时点拨，适当展示思维过程，使学生在百思不得求解中，逐渐获得柳暗花明的感悟与理解．明白最值求解问题，需引进合适的自变量，构造出此变量的函数．上述解法通过建立二次函数来求最值．在解题过程需一丝不苟，严谨求是，对逻辑推理及运算能力得到很好的训练．

学生2：我的想法是在(*)中，把边向角转化，在ΔABD由余弦定理，$c^2+\frac{1}{4}c^2-c^2\cos A=1$解出$c^2=\frac{4}{5-4\cos A}$，所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}c^2\cdot\sin A=\frac{2\sin A}{5-4\cos A}$，这样把面积转化为关于角$A$的三角函数，但接下来做不下去．

教师：能否利用$B=C$，把角A的三角函数进行转化？或者对整个式子进行合理变形?

学生2：由$B=C$，

先把分子与分母的每一项化为二次项，

$$S_{\Delta ABC}=\frac{2\sin A}{5-4\cos A}$$

$$=\frac{2\sin(\pi-2C)}{5-4\cos(\pi-2C)}=\frac{2\sin 2C}{5+4\cos 2C}$$

$$=\frac{4\sin C\cos C}{5(\cos^2 C+\sin^2 C)+4(\cos^2 C-\sin^2 C)}$$

$$=\frac{4\sin C\cos C}{9\cos^2 C+\sin^2 C}=\frac{4\tan C}{9+\tan^2 C}\ldots(*).$$

$\because 0<C<\frac{\pi}{2}$，

$$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{4}{\frac{9}{\tan C}+\tan C}\le\frac{4}{2\sqrt{9}}=\frac{2}{3}.$$

即时评析:把求解目标化为关于某个内角的三角函数，通过三角恒等变换利用基本不等式求函数的最值．

教师:注意到$m=\frac{2\sin A}{5-4\cos A}$的分子与分母都是一次式，还可以怎么处理?

学生3：$m=\frac{2\sin A}{5-4\cos A}$，

变形为$2\sin A+4m\cos A=5m$，

它就是$a\sin x+b\cos x=c$的模型，

利用辅助角公式，即$\sqrt{16m^2+4}\sin(A+\theta)=5m$．

因为$|\frac{5m}{\sqrt{16m^2+4}}|\le 1$，所以$9m^2\le 4$．

由于$m>0$，所以$m\le\frac{2}{3}$．

即时评析：构建模型$a\sin x+b\cos x=c$，对形如$f(x)=\frac{a+\sin x}{b+\cos x}$，可以反解用辅助角公式，利用三角函数的有界性得到最值．

教师：如果把$\frac{2\sin A}{5-4\cos A}$变形成$\frac{1}{2}\times\frac{\sin A}{\frac{5}{4}-\cos A}$，$\frac{\sin A}{\frac{5}{4}-\cos A}$的几何意义是什么？能否数形结合来解．

学生4：联想到它与斜率公式结构相似，

$\frac{\sin A}{\frac{5}{4}-\cos A}$可以看作两点的斜率，

$$S_{\Delta ABC}=\frac{2\sin A}{5-4\cos A}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin A}{\frac{5}{4}-\cos A},$$

令$k=\frac{0-(-\sin A)}{\frac{5}{4}-\cos A}$，

则k表示点$P(\cos A,-\sin A)$与$A(\frac{5}{4},0)$的连线斜率，点P的轨迹是以原点为圆心，1为半径在轴下方的半圆（去两个端点）．如图，所以k的最大值为直线PA与半圆相切．

因为$|OA|=\frac{5}{4}$，$|PA|=\frac{3}{4}$，

所以$|OP|=1$，于是$S_{\Delta ABC}\le\frac{1}{2}k_{PA}=\frac{2}{3}$．

即时评析：对于$\frac{y-b}{x-a}$形式的最值问题，转化为直线斜率，用几何法求参数的最值．借直观想象把数的抽象与形的直观结合，构建数学问题的直观模型，利用图形探索和解决数学问题．

教师：$BD=1$为定值，由AB与AD的大小关系，你们能联想到什么？

学生5：我发现$AB=2AD$，$BD=1$，联想到平

面内两个定点的距离之比等于不为1的常数的动点轨迹是阿波罗尼斯圆，故用解析法先得到 A 的轨迹方程．以 BD 所在的直线为 x 轴，BD 的中点为 y 轴建立直角坐标系，如图1，

设 $A(x,y)$ ，$B(-\frac{1}{2},0)$ ，$D(\frac{1}{2},0)$ ，

由 $AB=2AD$ ，$BD=1$ ，

得 $(x+\frac{1}{2})^2+y^2=4[(x-\frac{1}{2})^2+y^2]$ ，

得 $(x-\frac{5}{6})^2+y^2=(\frac{2}{3})^2$ ．

所以 A 在以 $E(\frac{5}{6},0)$ 为圆心，$\frac{2}{3}$ 为半径的圆上，

$(S_{\Delta ABC})_{\max}=2(S_{\Delta ABD})_{\max}=2\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ ．

即时评析：要善于挖掘线段大小关系的隐含条件，构建阿波罗尼斯圆模型，寻找到解题的突破口，显然解析法简洁．

教师：有个别同学也是用如下解析法，如图2，以 BC 所在的直线为 x 轴，BC 的中垂线为 y 轴来建系，设 $B(-m,0)$ ，$C(m,0)$ ，$A(0,n)$ $(m>0,n>0)$ 如何求 mn 的最值?

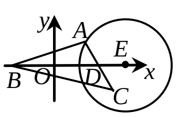

图1

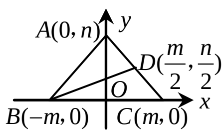

图2

学生6：$D(\frac{m}{2},\frac{n}{2})$ ．由 $|BD|=1$ ，

得 $(\frac{3}{2}m)^2+(\frac{n}{2})^2=1$ ，

即 $\frac{9}{4}m^2+\frac{1}{4}n^2=1$ ，

$\frac{9}{4}m^2+\frac{1}{4}n^2=1\geq2\cdot\frac{3}{2}m\cdot\frac{n}{2}$ ，

当且仅当 $\frac{3}{2}m=\frac{n}{2}$ 等号成立．

故 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AO=m\cdot n\leq\frac{2}{3}$ ．

教师：借助解析法，利用基本不等式，也是求最值最常用的方法．能否不用解析法?

学生6：设 h 是等腰 ΔABC ，BC 边上的高，则 $S=\frac{1}{2}ah$ ，$b^2=\frac{1}{4}a^2+h^2$ ①，怎么利用中线条件 $BD=1$？

教师：根据平行四边形对角线与边长的关系，则 $(2BD)^2+b^2=2(a^2+c^2)$ ，得 $4=2a^2+b^2$ ②，由①②得 $\frac{9}{4}a^2+h^2=4$ ．

学生7：$\frac{9}{4}a^2+h^2\geq2\cdot\frac{3}{2}ah$ ，得 $\frac{1}{2}ah\leq\frac{3}{2}$ ，当且仅当 $\frac{3}{2}a=h$ ，即 $a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，$b=c=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 时，上式取等号．

学生8：学生2的方法是构建角的分式型函数，我想还可以用其它角作自变量，利用等腰三角形性质，作 $AF\perp BC$ ，$DE\perp BC$ ，设 $\angle DBC=\theta$ ，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AF=BC\cdot DE=BD\sin\theta\cdot\frac{4}{3}BD\cos\theta=\frac{2}{3}\sin2\theta\leq\frac{2}{3}$ ，当且仅当 $\angle DBC=\theta=\frac{\pi}{4}$ ．

即时评析：通过引入适当的自变量，构建二倍角正弦函数来求最值，确实简洁!

3 教学反思

当学生在思考解决过程中，遇到了他自己无法逾越的障碍，或考虑问题的深度、广度不够时，教师再合适的引导和指点显得十分必要．学生思考的角度不同，得到不同的解法，难易不同，各有千秋，每种解法都体现了转化与化归的数学思想．根据“读思达”理念，引导学生认真阅读观察思考以上的几种解法，并且尝试归类，引导学生把以上8种解法可以归为两大类：代数法（学生1，2，3，7，8展示的方法）和解析法（学生4,5,6展示的方法）．丰富有条理的知识储备有助力于快速找到解题思路．通过各种解法，逻辑推理、数学运算、数学建模和数学直观核心素养得到了培养．

4 结束语

解题教学应该是学生不断阅读、思考、表达的过程．这一过程充分体现了学生分析问题，提出假设，进行验证，解决问题的过程．阅读即是全面地、全方位地理解题目的信息，思考即是据问题及任务的核心分析、整合、质疑、探索，调动已有的知识经验与生活背景，激发新的思维模型，表达即是在知识、理解、应用、分析、综合、判断等活动中，问题与条件及方法之间获得解悟并清晰表达其解答的过程．

在解题教学中，教师要摒弃“扶得过多，放得过少”，真正以学生为主体，构建积极宽松，民主

平等的师生关系，要充分暴露师生的思维过程，当学生的思维与教师的预设相偏离时，教师要随机应变，因势利导，从学生思维的障碍处出发，适时地引导和点拨，帮助学生化解难点走出困境，激发学生的解题兴趣．教学中对有代表性的典型例题，通过一题多解，一题多变的探究，引导学生从不同的角度思考和解决问题，促进学生深度学习，实现发展学生核心素养的教学目标．

旨向高阶思维，构建灵动课堂

——以《相似三角形的应用》为例

陈嘉尧　　陈海烽
福建省厦门五缘实验学校（361000）

高阶思维研究起源于布鲁姆和加涅的认知水平分类：识记、理解、运用为低价思维，分析、评价和创造为高阶思维[1]．培养学生高阶思维的最基本途径是问题解决，包含学生的问题解决学习与教师的问题解决教学两个方面．

高阶思维的培养，要求我们的课堂中在充分发挥学生主体性的基础上，以知识为载体，通过教师讲得生动，促使学生学得主动，力求师生良序互动，从而达到思维碰撞灵动[2]．本文以人教版教材九年级下册第二十七章第2节活动“相似三角形的应用”为例，择取几个片段，展示如何构建灵动课堂从而培养学生的高阶思维．

1 教学过程

1.1 片断1 问题呈现

情境1 灰太狼抓住了懒羊羊（如图1），并指着一座金字塔对喜羊羊说道：“除非你能说出这座金字塔的高度，否则就把懒羊羊吃掉．”

喜羊羊对美羊羊说：“每过一会，你帮我测量我影子的长度，当测量值与我身高相等时，我就能丈量出金字塔的高度了．”


图1

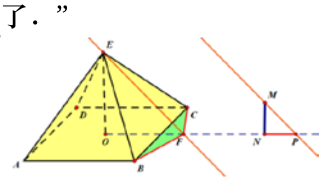
图2

师 请你根据喜羊羊的想法画出示意图．

投影学生作图

生1：如图2所示，线段MN表示喜羊羊的身高，线段NP表示其影长，当$MN=NP$时，金字塔的影长OF等于金字塔的高度OE．

师：你能说明该方案的合理性吗?

生1：太阳光是平行光线，故而$EF//MP$，由$\Delta MPN\backsim\Delta EFO$，可知$\Delta EFO$为等腰直角三角形，所以$OE=OF$．

师：对于这个解释，大家是否满意?（学生静默）在实际测量过程中，会碰到什么困难吗?

生2：如何测量金字塔的影长OF?

生3：(板演)线段OF的长度可看做点F到BC的距离，加上线段AB的一半．

师：这位同学观察的非常细致，可见，对于理想化的数学模型，在实际操作过程中，往往会遇到超出预估的问题．

设计意图 教师设计喜羊羊测量金字塔高度的情境，立足学生的生活经验，从学生的最近发展区出发，可以有效激发学生的学习兴趣，学生学得主动，积极调动其已有的知识和经验，为问题解决提供持久的内驱力，为深入思考问题做好情感铺垫．学生通过分析情境，找到解决问题的关键是构造相似三角形，并从中发现模型所涉及的隐形知识：太阳光线为平行光线．

另外，线段OF的长度直观感受容易测量，但却暗藏玄机：线段OF无法直接测量！在此，需要解决“怎么测”的问题．这充分说明了实际问题能培养学生的评价思维．

1.2 片断2 初步探讨

情境2 太阳公公身子一扭，光线不再由西向东照射（如图3）．

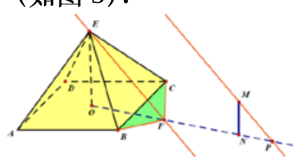
图3

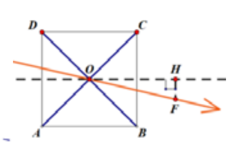
图4