

1.1 两个基本计数原理

第1课时 分类计数原理与分步计数原理

【学习目标】 1.了解分类计数原理与分步计数原理.2.会用这两个原理分析和解决一些简单的实际计数问题.

知识梳理

梳理教材 夯实基础

知识点一 分类计数原理

完成一件事,有 n 类方式,在第 1 类方式中有 m_1 种不同的方法,在第 2 类方式中有 m_2 种不同的方法, $\dots$, 在第 n 类方式中有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N = \underline{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$ 种不同的方法.

知识点二 分步计数原理

完成一件事需要分成 n 个步骤,做第 1 步有 m_1 种不同的方法,做第 2 步有 m_2 种不同的方法, $\dots$, 做第 n 步有 m_n 种不同的方法,则完成这件事共有 $N = \underline{m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n}$ 种不同的方法.

■ 思考辨析 判断正误 ■

- 1.在分类计数原理中,两类不同方案中的方法可以相同.($\times$)
- 2.在分类计数原理中,每类方案中的方法都能完成这件事.($\checkmark$)
- 3.在分步计数原理中,每个步骤中完成这个步骤的方法是各不相同的.($\checkmark$)
- 4.在分步计数原理中,事情若是分两步完成的,那么其中任何一个单独的步骤都不能完成这件事,只有两个步骤都完成后,这件事情才算完成.($\checkmark$)

题型探究

探究重点 素养提升

一、分类计数原理的应用

例 1 某高中毕业生填报志愿时,了解到甲、乙两所大学都有自己感兴趣的专业,具体情况如下:

	甲大学	乙大学
专业	生物学	数学
	化学	会计学
	医学	信息技术学
	工商管理学	
	物理学	

如果这名同学只能选择一所大学的 1 个专业，那么他的选择共有多少种？

解 由表可知，分两类，第一类：从甲大学 5 个专业中选择 1 个专业，共有 5 种选择方法；
第二类：从乙大学 3 个专业中选择 1 个专业，共有 3 种选择方法。

由分类计数原理知，这名同学的选择有 $N=5+3=8$ (种)。

反思感悟 利用分类计数原理，首先搞清要完成的“一件事”是什么，其次确定一个合理的分类标准，将完成“这件事”的方法进行分类；然后，对每一类中的方法进行计数，最后由分类计数原理计算总方法数。

跟踪训练 1 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$ ， $m, n \in A$ ，则方程 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$ 表示焦点位于 x 轴上的椭圆有 _____ 个。

考点 分类计数原理

题点 分类计数原理的应用

答案 6

解析 因为椭圆的焦点在 x 轴上，所以 $m > n$ 。

当 $m=4$ 时， $n=1,2,3$ ；

当 $m=3$ 时， $n=1,2$ ；

当 $m=2$ 时， $n=1$ ，

即所求的椭圆共有 $3+2+1=6$ (个)。

二、分步计数原理

例 2 一种号码锁有 4 个拨号盘，每个拨号盘上有从 0 到 9 共十个数字，这 4 个拨号盘可以组成多少个四位数的号码？(各位上的数字允许重复)

考点 分步计数原理

题点 分步计数原理的应用

解 按从左到右的顺序拨号可以分四步完成：

第一步，有 10 种拨号方式，所以 $m_1=10$ ；

第二步，有 10 种拨号方式，所以 $m_2=10$ ；

第三步，有 10 种拨号方式，所以 $m_3=10$ ；

第四步, 有 10 种拨号方式, 所以 $m_4=10$.

根据分步计数原理, 共可以组成 $N=10 \times 10 \times 10 \times 10=10\,000$ (个)四位数的号码.

延伸探究

若各位上的数字不允许重复, 那么这个拨号盘可以组成多少个四位数的号码?

解 按从左到右的顺序拨号可以分四步完成:

第一步, 有 10 种拨号方式, 即 $m_1=10$;

第二步, 去掉第一步拨的数字, 有 9 种拨号方式, 即 $m_2=9$;

第三步, 去掉前两步拨的数字, 有 8 种拨号方式, 即 $m_3=8$;

第四步, 去掉前三步拨的数字, 有 7 种拨号方式, 即 $m_4=7$.

根据分步计数原理, 共可以组成 $N=10 \times 9 \times 8 \times 7=5\,040$ (个)四位数的号码.

反思感悟 (1)应用分步计数原理时, 完成这件事情要分几个步骤, 只有每个步骤都完成了, 才算完成这件事情, 每个步骤缺一不可.

(2)利用分步计数原理解题的一般思路

①分步: 将完成这件事的过程分成若干步.

②计数: 求出每一步中的方法数.

③结论: 将每一步中的方法数相乘得最终结果.

跟踪训练 2 从 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 这六个数字中任选 3 个不重复的数字作为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的系数 a, b, c , 则可以组成抛物线的条数为_____.

考点 分步计数原理

题点 分步计数原理的应用

答案 100

解析 由题意知, a 不能为 0,

故 a 的值有 5 种选法;

b 的值也有 5 种选法;

c 的值有 4 种选法.

由分步计数原理, 得抛物线的条数为 $5 \times 5 \times 4=100$.

■ 核心素养之数学运算 ■

两个计数原理的综合应用

典例 有一项活动, 需在 3 名老师, 8 名男同学和 5 名女同学中选人参加.

(1)若只需一人参加, 有多少种不同选法?

(2)若需老师、男同学、女同学各一人参加, 有多少种不同选法?

(3)若需一名老师, 一名学生参加, 有多少种不同选法?

解 (1)有三类选人的方法: 3 名老师中选一人, 有 3 种选法; 8 名男同学中选一人, 有 8 种选法; 5 名女同学中选一人, 有 5 种选法.

由分类计数原理, 共有 $3+8+5=16$ (种)选法.

(2)分三步选人：第一步选老师，有3种方法；第二步选男同学，有8种方法；第三步选女同学，有5种方法.由分步计数原理，共有 $3 \times 8 \times 5 = 120$ (种)选法.

(3)可分两类,每一类又分两步.第一类:选一名老师再选一名男同学,有 $3 \times 8 = 24$ (种)选法;第二类:选一名老师再选一名女同学,共有 $3 \times 5 = 15$ (种)选法.

由分类计数原理，共有 $24+15=39$ (种)选法.

[素养评析] (1)用两个计数原理解决具体问题时,首先要分清是“分类”还是“分步”,其次要清楚“分类”或“分步”的具体标准.在“分类”时要做到“不重不漏”,在“分步”时要正确设计“分步”的程序,注意步与步之间的连续性.

(2)理解运算对象,选择恰当的运算方法,能进一步发展数学运算能力,形成规范化思考问题的品质,提升学生的数学核心素养.

随堂演练

基础巩固 学以致用

1.从 A 地到 B 地,可乘汽车、火车、轮船三种交通工具,如果一天内汽车发 3 次,火车发 4 次,轮船发 2 次,那么一天内乘坐这三种交通工具的不同走法数为()

- A. $1+1+1=3$
C. $3\times 4\times 2=24$
- B. $3+4+2=9$
D.以上都不对

考点 分类计数原理

题点 分类计数原理的应用

答案 B

解析 分三类：第一类，乘汽车，从3次中选1次有3种走法；第二类，乘火车，从4次中选1次有4种走法；第三类，乘轮船，从2次中选1次有2种走法，所以共有 $3+4+2=9$ (种)不同的走法.

2. 已知 $x \in \{2, 3, 7\}$, $y \in \{-31, -24, 4\}$, 则 xy 的不同的值的个数是()

- A.2 B.3 C.6 D.9

答案 D

解析 x 有 3 种不同的选法, y 有 3 种不同的选法,

则 xy 共有 $3 \times 3 = 9$ (个) 不同的值.

3.某公司员工义务献血,在体检合格的人中, O 型血的有 10 人, A 型血的有 5 人, B 型血的有 8 人, AB 型血的有 3 人.从 4 种血型的人中各选 1 人去献血,不同的选法种数为()

- A.1 200 B.600 C.300 D.26

答案 A

解析 分四步:

第一步，选 O 型血的人有 10 种选法；

第二步,选 A 型血的人有 5 种选法;

第三步,选 B 型血的人有 8 种选法;

第四步,选 AB 型血的人有 3 种选法.

故共有 $10 \times 5 \times 8 \times 3 = 1\,200$ (种)不同的选法.

4.用 1,2,3 这三个数字能写出_____个没有重复数字的两位偶数.

答案 2

5.现有 4 件不同款式的上衣和 3 条不同颜色的长裤,如果一条长裤与一件上衣配成一套,则不同的配法种数为_____.

考点 分步计数原理

题点 分步计数原理的应用

答案 12

解析 要完成配套,分两步:第 1 步,选上衣,从 4 件上衣中任选一件,有 4 种不同的选法;第 2 步,选长裤,从 3 条长裤中任选一条,有 3 种不同的选法.故共有 $4 \times 3 = 12$ (种)不同的配法.

■ 课堂小结 ■

1.使用两个基本计数原理解题的本质

分类 → 将问题分成互相排斥的几类,逐类解决 → 分类计数原理

分步 → 把问题分化为几个互相关联的步骤,逐步解决 → 分步计数原理

2.利用两个计数原理解决实际问题的常用方法

列举法 $\xrightarrow{\text{种数较少}}$ 将各种情况一一列举

间接法 $\xrightarrow{\text{正面复杂}}$ 用总数减去不满足条件的种数

课时对点练

注重双基 强化落实

一、选择题

1.图书馆的书架有 3 层,第 1 层有 3 本不同的数学书,第 2 层有 5 本不同的语文书,第 3 层有 8 本不同的英语书,现从中任取 1 本书,则不同的取法共有()

A.120 种 B.16 种 C.64 种 D.39 种

考点 分类计数原理

题点 分类计数原理的应用

答案 B

解析 由于书架上有 $3+5+8=16$ (本)不同的书,则从中任取 1 本书,共有 16 种不同的取法.

2.已知 $a \in \{3,4,6\}$, $b \in \{1,2\}$, $r \in \{1,4,9,16\}$, 则方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 可表示的不同圆的个数是()

A.6 B.9 C.16 D.24

考点 分步计数原理

题点 分步计数原理的应用

答案 D

解析 确定一个圆的方程可分为三个步骤:第一步,确定 a , 有 3 种选法;第二步,确定 b , 有 2 种选法;第三步,确定 r , 有 4 种选法.由分步计数原理得,不同圆的个数为 $3 \times 2 \times 4 = 24$.

3.从集合 $A = \{1,2,3, \dots, 8\}$ 中任意选出 3 个不同的数,使这 3 个数成等比数列,则这样的等比数列的个数为()

A.3 B.4 C.6 D.8

考点 分类计数原理

题点 分类计数原理的应用

答案 B

解析 以 1 为首项的等比数列为 1,2,4; 以 2 为首项的等比数列为 2,4,8.把这两个数列的顺序颠倒,又得到 2 个数列, $\therefore$ 所求数列为 4 个.

4.某班小张等 4 位同学报名参加 A, B, C 三个课外活动小组,每位同学限报其中一个小组,且小张不能报 A 小组,则不同的报名方法有()

A.27 种 B.36 种 C.54 种 D.81 种

答案 C

解析 小张的报名方法有 2 种,其他 3 位同学各有 3 种,由分步计数原理知,共有 $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$ (种)不同的报名方法.

5.从甲地到乙地有 2 种走法,从乙地到丙地有 4 种走法,从甲地不经过乙地到丙地有 3 种走法,则从甲地到丙地的不同走法种数为()

A. $2+4+3$ B. $2 \times 4+3$

C. $2 \times 3+4$ D. $2 \times 4 \times 3$

考点 两个计数原理的区别与联系

题点 两个计数原理的简单综合应用

答案 B

解析 分两类,一是从甲地经乙地到丙地,有 2×4 种不同走法,二是直接从甲地到丙地,有 3 种不同走法,所以从甲地到丙地的不同走法种数为 $2 \times 4+3$.

6.现有 6 名同学去听同时进行的 5 个课外知识讲座,每名同学可自由选择其中的一个讲座,不同选法的种数是()

A. 5^6

B. 6^5

C. $\frac{5 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2}$

D. $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$

考点 分步计数原理

题点 分步计数原理的应用

答案 A

解析 每位同学都有 5 种选择,共有 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$ (种).

二、填空题

7.一个科技小组中有 4 名女同学、5 名男同学,从中任选 1 名同学参加学科竞赛,共有不同的选派方法_____种,若从中任选 1 名女同学和 1 名男同学参加学科竞赛,共有不同的选派方法_____种.

答案 9 20

解析 根据分类计数原理知,从中任选 1 名同学参加学科竞赛共有 $5+4=9$ (种)选派方法.根据分步计数原理知,从中任选 1 名女同学和 1 名男同学参加学科竞赛共有 $4 \times 5 = 20$ (种)选派方法.

8.某体育场南侧有 4 个大门,北侧有 3 个大门,某学生到该体育场练习跑步,则他进出门的方案有_____种.

考点 两个计数原理的区别与联系

题点 两个计数原理的简单综合应用

答案 49

解析 学生进门有 $3+4=7$ (种)选择,同样出门也有 7 种选择,由分步计数原理知,进出门的方案有 $7 \times 7 = 49$ (种).

9.已知集合 $M \in \{1, -2, 3\}$, $N \in \{-4, 5, 6, -7\}$,从两个集合中各取一个元素作为点的坐标,则这样的坐标在直角坐标系中可表示第一、二象限内不同的点的个数是_____.

考点 两个计数原理的区别与联系

题点 两个计数原理的简单综合应用

答案 14

解析 M 中元素作为横坐标, N 中元素作为纵坐标,则在第一、二象限内点的个数为 $3 \times 2 = 6$. M 中元素作为纵坐标, N 中元素作为横坐标,则在第一、二象限内点的个数为 $4 \times 2 = 8$. 共有 $6+8=14$ (个).

10.若三角形的三边长均为正整数,其中一边长为 4,另外两边长为 b, c ,且满足 $b \leq 4 \leq c$,则这样的三角形有_____个.

答案 10

解析 当 $b=1$ 时, $c=4$; 当 $b=2$ 时, $c=4,5$;

当 $b=3$ 时, $c=4,5,6$;

当 $b=4$ 时, $c=4,5,6,7$.

故共有 $1+2+3+4=10$ (个)这样的三角形.

三、解答题

11. 高二一班有学生 50 人, 男生 30 人; 高二二班有学生 60 人, 女生 30 人; 高二三班有学生 55 人, 男生 35 人.

(1) 从中选一名学生担任学生会主席, 有多少种不同的选法?

(2) 从高二一班、二班男生中, 或从高二三班女生中选一名学生任学生会体育部长, 有多少种不同的选法?

解 (1) 选一名学生任学生会主席有 3 类不同的选法:

第一类, 从高二一班选一名, 有 50 种不同的选法;

第二类, 从高二二班选一名, 有 60 种不同的选法;

第三类, 从高二三班选一名, 有 55 种不同的选法.

故任选一名学生任学生会主席的选法共有

$50+60+55=165$ (种).

(2) 选一名学生任学生会体育部长有 3 类不同的选法:

第一类, 从高二一班男生中选, 有 30 种不同的选法;

第二类, 从高二二班男生中选, 有 30 种不同的选法;

第三类, 从高二三班女生中选, 有 20 种不同的选法.

故选一名学生任学生会体育部长共有

$30+30+20=80$ (种)不同的方法.

12. 有 3 个不同的负数、5 个不同的正数, 从中任取 2 个数, 使它们的积为正数, 问: 有多少种不同的取法?

解 根据题意, 知积为正数的情况分为两类.

第一类是 2 个数都是负数, 有 3 种不同的取法,

第二类是 2 个数都是正数, 有 10 种不同的取法,

综上所述, 不同取法的种数为 $3+10=13$.

13. 已知集合 $A=\{2,4,6,8,10\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$, 在 A 中任取一元素 m 和在 B 中任取一元素 n , 组成数对 (m, n) , 问:

(1) 有多少个不同的数对?

(2) 其中所取两数 $m>n$ 的数对有多少个?

解 (1) $\because$ 集合 $A=\{2,4,6,8,10\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$, 在 A 中任取一元素 m 和在 B 中任取一元素 n ,

组成数对 (m, n) , 先选出 m 有5种结果, 再选出 n 有5种结果, 根据分步计数原理知, 共有 $5 \times 5 = 25$ (个)不同的数对.

(2)在(1)中的25个数对中求所取两数 $m > n$ 的数对个数可以分类来解, 当 $m=2$ 时, $n=1$, 有1种结果, 当 $m=4$ 时, $n=1, 3$, 有2种结果, 当 $m=6$ 时, $n=1, 3, 5$, 有3种结果, 当 $m=8$ 时, $n=1, 3, 5, 7$, 有4种结果, 当 $m=10$ 时, $n=1, 3, 5, 7, 9$, 有5种结果. 综上所述, 共有数对 $1+2+3+4+5=15$ (个).

►探究与拓展

14. 满足 $a, b \in \{-1, 0, 1, 2\}$, 且关于 x 的方程 $ax^2 + 2x + b = 0$ 有实数解的有序数对 (a, b) 的个数为_____.

考点 分类计数原理

题点 分类计数原理的应用

答案 13

解析 对 a 进行讨论: 为0与不为0, 当 a 不为0时还需考虑判别式与0的大小.

若 $a=0$, 则 $b=-1, 0, 1, 2$, 此时 (a, b) 的取值有4个;

若 $a \neq 0$, 则方程 $ax^2 + 2x + b = 0$ 有实根, 需 $\Delta = 4 - 4ab \geq 0$, $\therefore ab \leq 1$,

此时 (a, b) 的取值为 $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 2)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, 共9个.

$\therefore (a, b)$ 的个数为 $4+9=13$.

15. 某外语组有9人, 每人至少会英语和日语中的一门, 其中7人会英语, 3人会日语, 从中选出会英语和日语的各一人到边远地区支教, 有多少种不同的选法?

考点 两个计数原理的区别与联系

题点 两个计数原理的简单综合应用

解 由题意知, 有1人既会英语又会日语, 6人只会英语, 2人只会日语.

方法一 分两类.

第一类: 从只会英语的6人中选1人教英语, 有6种选法, 则教日语的有 $2+1=3$ (种)选法, 此时共有 $6 \times 3 = 18$ (种)选法;

第二类: 从既会英语又会日语的1人中选1人教英语, 有1种选法, 则选会日语的有2种选法, 此时有 $1 \times 2 = 2$ (种)选法.

所以由分类计数原理知, 共有 $18+2=20$ (种)选法.

方法二 设既会英语又会日语的人为甲, 则甲有入选、不入选两类情形, 入选后又要分两种:

(1)教英语; (2)教日语.

第一类: 甲入选.

(1)甲教英语, 再从只会日语的2人中选1人,

由分步计数原理知, 有 $1 \times 2 = 2$ (种)选法;

(2)甲教日语，再从只会英语的 6 人中选 1 人，

由分步计数原理知，有 $1 \times 6 = 6$ (种)选法，

故甲入选的不同选法共有 $2 + 6 = 8$ (种)。

第二类：甲不入选，可分两步。

第一步，从只会英语的 6 人中选 1 人有 6 种选法；

第二步，从只会日语的 2 人中选 1 人有 2 种选法。

由分步计数原理，有 $6 \times 2 = 12$ (种)不同的选法。

综上，共有 $8 + 12 = 20$ (种)不同的选法。