仪征中学 2020 届高三（上）数学中档题训练 8　2019. 11.21

班级________________　学号_________　姓名________________　成绩____________.

1.若复数 z 满足 $z\mathrm{i}=1-3\mathrm{i}$，其中 i 为虚数单位，则 $\overline{z}=$________.

2.在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则该双曲线的离心率为_______.

3.在等差数列$\{a_n\}$中，S_n 是其前 n 项和，若 $S_7=S_5+4$，则 $S_9-S_3=$________.

4．若函数 $f(x)=\cos(2x+\theta)$（$0<\theta<\pi$）的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称，则 $\theta=$________.

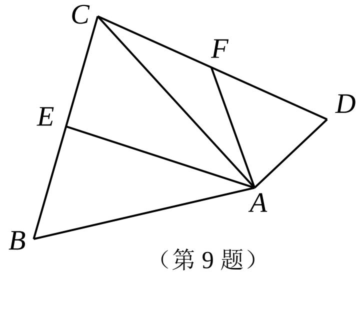
5．已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差为-2，且 a_2,a_4,a_5 成等比数列，则该等比数列的公比为______________.

6．已知 $A=\left[0,2\right]$，$B=\left\{x\left|x^3-x^2-x-a\geq 0\right.\right\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的最大值为______.

7.　已知 $\vec{a}+\vec{b}=(3,4),\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=3$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$______.

8.若 $P(-2,1)$ 为角 α 的终边上一点，则 $\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$_______.

9．如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle CAD=\frac{\pi}{2}$，$AD=2$，$AB=BC=CA=4$，E，F 分别为边 BC，CD 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$________.



（第 9 题）

10.已已知$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，$x\in\left(0,\pi\right)$，则$\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=$________.

11.已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=2a_n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

数列$\{b_n\}$满足$nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$b_1=1$.

（1）求数列$\{a_n\}$

（2）求$\{b_n\}$的通项公式；

12. 已知函数$f(x)=a^x+b^x\left(a>0,a\neq1,b>0,b\neq1\right)$是偶函数.

（1）求ab的值；

（2）若$f(\lg x)<f(1)$，求x的取值范围.

1． $-3+i$　2．2　3. 12　4． $\frac{5}{6}\pi$　5. 2　6. -1　7. 4　8. 7

9. $6-\sqrt{3}$　10. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

11. 当 n=1时， $S_1=2a_1-1=a_1$，所以 a_1=1 .

当 $n\geq 2$ 时， $S_n=2a_n-1$， $S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，

两式相减得 $a_n=2a_{n-1}$，

从而数列 $\{a_n\}$ 为首项 a_1=1，公比 q=2 的等比数列，

从而数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$.

由 $nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1)$ 两边同除以 $n(n+1)$，

得 $\frac{b_{n+1}}{n+1}-\frac{b_n}{n}=1$

从而数列 $\{\frac{b_n}{n}\}$ 为首项 $b_1=1$，公差 $d=1$ 的等差数列，所以 $\frac{b_n}{n}$=n，

从而数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=n^2$.

12.【解】（1）因为 $f(x)$ 是偶函数，所以对任意实数 x，有 $f(x)-f(-x)=0$

即 $f(x)-f(-x)=a^x+b^x-a^{-x}-b^{-x}=a^x+b^x-\frac{1}{a^x}-\frac{1}{b^x}$

$=\frac{(a^xb^x-1)(a^x+b^x)}{a^xb^x}=0$，　……2 分

所以 $(a^xb^x-1)(a^x+b^x)=0$ 对任意实数 x 成立，　……4 分

因为 $a^x>0$， $b^x>0$，

所以 $a^xb^x-1=0$，即 $(ab)^x=1$ 对任意实数 x 成立，

所以 $ab=1$.　……6 分

（2）由（1）知 $b=\frac{1}{a}$，此时 $f(x)=a^x+\frac{1}{a^x}$，

因为 $a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1$，故不妨设 $a>1$，

任取 $0\leqslant x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=a^{x_1}+\frac{1}{a^{x_1}}-a^{x_2}-\frac{1}{a^{x_2}}$

$=(a^{x_1}-a^{x_2})+(\frac{1}{a^{x_1}}-\frac{1}{a^{x_2}})$

$=\frac{(a^{x_1}-a^{x_2})(a^{x_1}a^{x_2}-1)}{a^{x_1}a^{x_2}}$，　……8 分

因为 $0\leqslant x_1<x_2$， $a>1$，所以 $1\leqslant a^{x_1}<a^{x_2}$，

所以 $a^{x_1}-a^{x_2}<0$， $a^{x_1}a^{x_2}>1, a^{x_1}a^{x_2}-1>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，　　　　　　　　　　　　　　……10 分

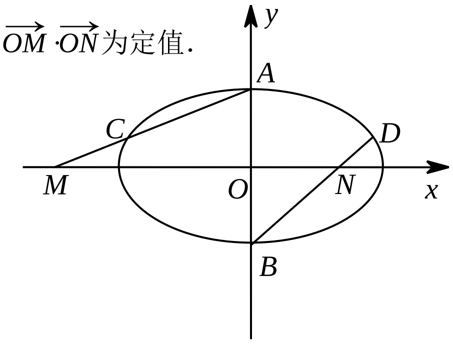
因为 $f(\lg x)<f(1)$，所以 $f(|\lg x|)<f(1)$，

所以 $|\lg x|<1$，解得 $\frac{1}{10}<x<10$.　　　　　　　　　　　　　……14 分

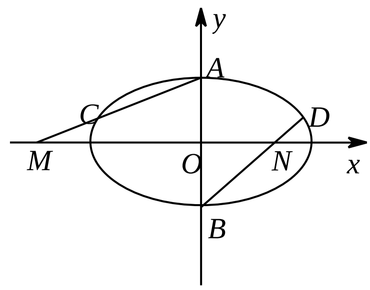
在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且短轴长为 2.

（1）求椭圆的方程;

（2）设椭圆的上、下顶点分别为 A，B，点 C，D 是椭圆上关于 y 轴对称的两个不同的点，直线 AC，BD 交 x 轴分别于点 M，N，求证：$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 为定值.



17．解：（1）$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$2b=2$…………2 分



解得：$a=\sqrt{2},b=c=1$

所以椭圆方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$…………4 分

（2）设 $D(x_0,y_0)$，$C(-x_0,y_0)$

则 l_{AC}：$y=\frac{y_0-1}{-x_0}x+1$…………6 分

所以 $M(\frac{x_0}{y_0-1},0)$…………8 分

同理 $N(\frac{x_0}{y_0+1},0)$…………10 分

所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{x_0^2}{y_0^2-1}$

又因为$\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{x_0^2}{y_0^2-1}=\frac{x_0^2}{-\frac{x_0^2}{2}}=-2$…………14 分