江苏省仪征中学2020届高三（上）期中考试热身练习2

班级____________姓名______________学号____________评价____________

一、填空题：

1. 复数（a+i）（1+2i）是纯虚数（i是虚数单位），则实数a=______.

2. 命题p：“$\exists x$＞1，$x^2 \geq 1$”，则命题$\neg p$是：______.

3. 已知角α的终边经过点P（t，2t）（t＞0），则cosα的值为______.

4. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$=1（$a$＞0，$b$＞0）的焦距为$2\sqrt{5}$，且双曲线的一条渐近线与直线2$x$+$y$=0垂直，则双曲线的方程为______.

5. 已知函数$f(x)$是定义在R上且周期为4的偶函数，当$x\in[2,4]$时，$f(x)=|\log_4(x-\frac{3}{2})|$，则$f(\frac{1}{2})$的值为______.

6. 在凸四边形$ABCD$中，BD=2，且$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})=5$，则四边形$ABCD$的面积为______ .

7. 已知在△ABC中，a，b，c分别为三个内角A，B，C的对边，若tan$A$＝2tan$B$，则$\frac{b+c}{a}$的最大值为_____.

8. 已知x＞0，y＞0，$x+y=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$，则$x$+$y$的最小值为______.

9. 在平面直角坐标系xOy中，已知点A，F分别为椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点和右焦点，过坐标原点$O$的直线交椭圆$C$于$P$，$Q$两点，线段$AP$的中点为$M$，若$Q$，$F$，$M$三点共线，则椭圆$C$的离心率为______.

10. 已知△ABC的三边a，b，c所对的角分别为A，B，C，若a＞b且$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos C}{b}$，则$A$=______

11. 已知函数$f(x)=\begin{cases} x+3^x, x\leq 0 \\ |x-a|-\dfrac{1}{x}, x>0 \end{cases}$有4个不同的零点，则实数$a$的取值范围为_________.

12. 在平面直角坐标系xOy中，圆O：$x^2+y^2=1$，圆M：$(x+a+3)^2+(y-2a)^2=1$（a为实数）．若圆O和圆M上分别存在点P，Q，使得∠OQP=30°，则a的取值范围为______.

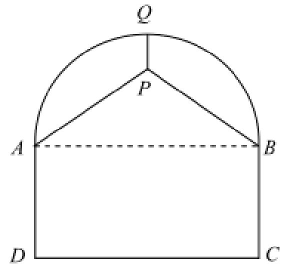
二、解答题（本大题共 **8** 小题，共 **106.0** 分）

13. 已知向量$\vec{a}=(2cos\alpha，sin^2\alpha)$，$\vec{b}=(2sin\alpha，t)$，$\alpha\in(0，\frac{\pi}{2})$，$t$为实数.

（1）若$\vec{a}-\vec{b}=(\frac{2}{5}，0)$，求 t 的值；

（2）若 t=1，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，求$tan(2\alpha+\frac{\pi}{4})$的值.

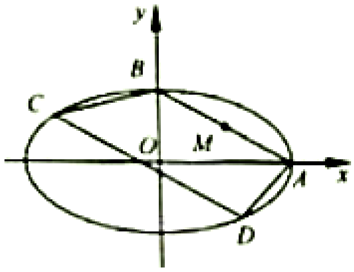
14. 如图，某隧道的剖面图是由半圆及矩形$ABCD$组成，交通部门拟在隧道顶部安装通风设备（视作点P），为了固定该设备，计划除从隧道最高点Q处使用钢管垂直向下吊装以外，再在两侧自A,B两点分别使用钢管支撑. 已知道路宽$AB=8cm$，设备要求安装在半圆内部，所使用的钢管总长度为L.



（1）①设$PQ=x$，将L表示为关于x的函数；②设$\angle PAB=\theta$，将L表示为关于θ的函数；

（2）请选用（1）中的一个函数关系式，说明如何设计，所用的钢管材料最省？

15. 如图，在平面直角坐标系 xoy 中，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点和上顶点分别为点 A，B，M 是线段 AB 的中点，且$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{2}b^2$.



（1）求椭圆的离心率；

（2）若 a=2，四边形 $ABCD$ 内接于椭圆，$AB\parallel CD$，记直线 AD，BC 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：$k_1\cdot k_2$为定值.

三、附加题

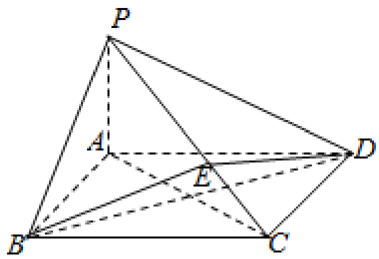
16. 二阶矩阵 M 对应的变换 T 将点（-2，1）与（1，0）分别变换成点（3，0）与（1，2）．求矩阵 M 的特征值.

17. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的普通方程为 x-y-2=0，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases} x=2\sqrt{3}cos\theta \\ y=2sin\theta \end{cases}$（θ 为参数），设直线 l 与曲线 C 交于 A，B 两点．若点 P 在曲线 C 上运动，当△PAB 的面积最大时，求点 P 的坐标及△PAB 的最大面积．

18. 如图所示，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，PA⊥平面 $ABCD$，点 E 在线段 PC 上，PC⊥平面 BDE，设 PA=1，AD=2．

（1）求平面 BPC 的法向量；

（2）求二面角 B-PC-A 的正切值．



答案和解析

1.【答案】2

2.【答案】∀x>1，x^2<1

3.【答案】$\frac{\sqrt{5}}{5}$

4.【答案】$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

5.【答案】$\frac{1}{2}$

6.【答案】3

7.【答案】2

8.【答案】3

9.【答案】$\frac{1}{3}$

10.【答案】$\frac{\pi}{2}$

11.【答案】$(2,+\infty)$

12.【答案】$\left[-\frac{6}{5},0\right]$

13.【答案】解：（1）向量$\vec{a}=(2cos\alpha，sin^2\alpha)$，$\vec{b}=(2sin\alpha，t)$，$\alpha\in(0，\frac{\pi}{2})$，$t$为实数，

若$\vec{a}-\vec{b}=(\frac{2}{5}，0)$，则（2cosα-2sinα，sin^{2}α-$t$）=（$\frac{2}{5}$，0），

可得 cosα-sinα=$\frac{1}{5}$，平方可得 sin^{2}α+cos^{2}α-2cosαsinα=$\frac{1}{25}$，

即为 2cosαsinα=1-$\frac{1}{25}$=$\frac{24}{25}$，（cosα>0，sinα>0），

由 sin^{2}α+cos^{2}α=1，解得 cosα+sinα=$\sqrt{(cos\alpha-sin\alpha)^2+4sin\alpha cos\alpha}$=$\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{48}{25}}$=$\frac{7}{5}$，

即有 cosα=$\frac{3}{5}$，sinα=$\frac{4}{5}$.

则 t=sin^{2}α=$\frac{16}{25}$；

（2）若 t=1，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，即有 4cosαsinα+sin^{2}α=1，
即有 4cosαsinα=1-sin^{2}α=cos^{2}α，

由 α 为锐角，可得 cosα∈（0，1），即有 tanα=$\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$=$\frac{1}{4}$，

则 tan2α=$\frac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$=$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}}$=$\frac{8}{15}$，

$tan(2\alpha+\frac{\pi}{4})$=$\frac{tan2\alpha+1}{1-tan2\alpha}$=$\frac{1+\frac{8}{15}}{1-\frac{8}{15}}$=$\frac{23}{7}$.

14.【答案】（1）延长 QP 交 AB 于点 E，则 $QE \perp AB$，且 E 为 AB 的中点，

所以 $EA = EB = EQ = \frac{1}{2}AB = 4$，由对称性可知，$PA = PB$.

①若 $PQ = x$，则 $0 < x < 4$，$EP = 4 - x$，

在 $Rt\Delta PAE$ 中，$PA = \sqrt{PE^2 + AE^2} = \sqrt{(4-x)^2 + 16}$，

所以 $L = PQ + 2PA = x + 2\sqrt{(4-x)^2 + 16}\,(0 < x < 4)$，

②若 $\angle PAB = \theta$，则 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$，

在 $Rt\Delta PAE$ 中，$PA = \frac{AE}{\cos\theta} = \frac{4}{\cos\theta}$，$PE = AE\tan\theta = 4\tan\theta$，

所以 $PQ = QE - PE = 4 - 4\tan\theta$，

所以 $L = PQ + 2PA = 4 - 4\tan\theta + 2\times\frac{4}{\cos\theta} = 4 + 4\times\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}\left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$.

（2）选取②中的函数关系式，$L = 4 + 4\times\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}\left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$，

记 $f(\theta) = \frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}\left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$，

则由 $f'(\theta) = \frac{2\sin\theta - 1}{\cos^2\theta} = 0$ 及 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 可得，$\theta = \frac{\pi}{6}$，

当 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 时 $f'(\theta) < 0$，此时 $f(\theta)$ 单调递减，

当 $\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 时 $f'(\theta) > 0$，此时 $f(\theta)$ 单调递增，

所以当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时，$f(\theta)$ 取得最小值，

从而钢管总长度为 L 取得最小值，即所用的钢管材料最省.

15.【答案】（1）解：A（a，0），B（0，b），线段 AB 的中点 $M(\frac{a}{2}，\frac{b}{2})$.

$\overrightarrow{AB}$=（-a，b），$\overrightarrow{OM}=(\frac{a}{2}，\frac{b}{2})$，

$\because \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}b^2$，

$\therefore -\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}b^2=-\frac{3}{2}b^2$，化为：$a=2b$，

$\therefore$椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

（2）证明：由a=2，可得 b=1，

∴椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{4}$+y^2=1，A（2，0），B（0，1），

直线 BC 的方程为：$y=k_2x+1$，联立$\begin{cases}y=k_2x+1\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，化为：（$1+4k_2^2$）$x^2+8k_2x=0$，

解得$x_C=\frac{-8k_2}{1+4k_2^2}$，∴$y_C=\frac{1-4k_2^2}{1+4k_2^2}$，

即 C（$\frac{-8k_2}{1+4k_2^2}$，$\frac{1-4k_2^2}{1+4k_2^2}$）．

直线 AD 的方程为：$y=k_1(x-2)$，联立$\begin{cases}y=k_1(x-2)\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，化为：

$(1+4k_1^2)x^2-16k_1^2x+16k_1^2-4=0$，

∴$2x_D=\frac{16k_1^2-4}{1+4k_1^2}$，解得 $x_D=\frac{8k_1^2-2}{1+4k_1^2}$，$y_D=\frac{-4k_1}{1+4k_1^2}$，可得 D（$\frac{8k_1^2-2}{1+4k_1^2}$，$\frac{-4k_1}{1+4k_1^2}$）

∴$k_{CD}=\frac{y_C-y_D}{x_C-x_D}=-\frac{1}{2}$，

化为：$1-16k_1^2k_2^2+2k_1-2k_2+8k_1k_2^2-8k_2k_1^2=0$．

∴$(k_1k_2-\frac{1}{4})$（$4k_1k_2+4k_1-4k_2+1$）=0，

∴$k_1k_2=\frac{1}{4}$．

16.【答案】解：设 $M=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，这里 a，b，c，$d\in R$，

则$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$，

则$\begin{cases}-2a+b=3\\ -2c+d=0\end{cases}$①，$\begin{cases}a=1\\ c=2\end{cases}$②，

联立①②解得：$a=1$，$b=5$，$c=2$，$d=4$，

故 $M=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，

矩阵 M 的特征多项式为 f（λ）=（λ-1）（λ-4）-10=λ^2-5λ-6，

故矩阵 M 的特征值为 6 或-1．

17.【答案】解：∵曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2\sqrt{3}cos\theta\\ y=2sin\theta\end{cases}$（θ 为参数），

∴曲线 C 的普通方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}$=1，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1\\ x-y-2=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\ y=-2\end{cases}$或$\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$，

∴A（0，-2），B（3，1），∴$|AB|=\sqrt{(0-3)^2+(-2-1)^2}=3\sqrt{2}$，

△PAB 的面积最大，即点 P 到直线 l 的距离 d 最大，

设 P（$2\sqrt{3}cos\theta$，sinθ），则 $d=\frac{|2\sqrt{3}cos\theta-2sin\theta-2|}{\sqrt{2}}=\frac{|4cos(\theta+\frac{\pi}{6})-2|}{\sqrt{2}}$，

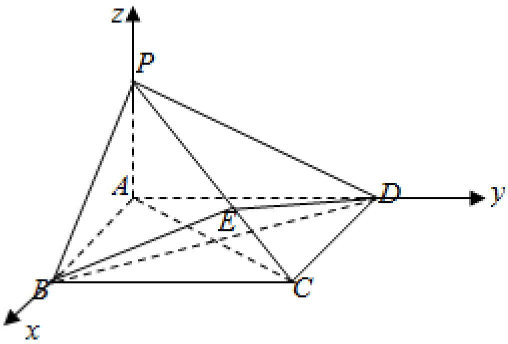
当 cos（$\theta+\frac{\pi}{6}$）=-1，即$\theta=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in Z$ 时，

$d_{max}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，

∴△PAB 的最大面积 $S=\frac{1}{2}\times AB\times d_{max}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}$=9.

此时 P（-3，$\frac{1}{2}$）.

18.【答案】解：（1）∵PA⊥平面 $ABCD$，
BD⊂平面 $ABCD$，
∴PA⊥BD.
∵PC⊥平面 BDE，BD⊂平面 BDE，∴PC⊥BD.
又 PA∩PC=P，∴BD⊥平面 PAC，AC⊂平面 PAC，
∴BD⊥AC.
又底面 $ABCD$ 为矩形，∴$ABCD$ 为正方形.



建立如图所示的空间直角坐标系.
A（0，0，0），B（2，0，0），C（2，2，0），P（0，0，1），D（0，2，0）.
$\overrightarrow{BC}$=（0，2，0），$\overrightarrow{BP}$=（-2，0，1），
设平面 BPC 的法向量为$\vec{n}$=（x，y，z），
∴$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0\end{cases}$，∴$\begin{cases}2y=0\\ -2x+z=0\end{cases}$，取$\vec{n}$=（1，0，2．）.
∴平面 BPC 的一个法向量为$\vec{n}$=（1，0，2．）.
（2）平面 PAC 的法向量为：$\overrightarrow{BD}$=（-2，2，0）.
设二面角 B-PC-A=θ，由图可知：θ 为锐角.

则 cos＜$\vec{n}$，$\overrightarrow{BD}$＞=$\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\vec{n}||\overrightarrow{BD}|}=\frac{-2}{\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

∴cosθ=$\frac{\sqrt{10}}{10}$.

∴sinθ=$\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

∴tanθ=$\frac{sin\theta}{cos\theta}$=3．即二面角 B-PC-A 的正切值为 3.