抓住高三数学首轮复习的“牛鼻子”

赵士元 （江苏省苏州市吴中区教学与教育科学研究室 215104）

2022 年高考备考工作已拉开帷幕，作为最能影响高考总分的数学学科，自然是备受关注. 数学如何备考才高效？对于这一问题，很多数学教学工作者都在不断地思考和尝试. 众所周知，数学是一门思维性很强的学科，严密的逻辑性是数学学科最为明显的特征，把数学看作是思维的体操一点都不为过. 可是，在目前的数学复习课上，学生思维还常常受制于教师，学生缺乏独立思考和自主解决问题的体验，复习课上“套思路”“套模式”的现象比较普遍. 我们认为提高数学课的复习效益，特别是第一轮复习的质量，才能提升学生在考场上的竞争力. 最重要的一环也是最有效的一环是抓好习惯. 习惯是解题最自然也是最舒服的得分方法，它是高考首轮复习的“牛鼻子”.

什么是习惯，笔者认为习惯是一个人在长期积累的过程中形成的一种稳定的自动化的行为方式. 下文结合自身的教学体会谈谈在数学备考中如何从习惯入手，切实抓好数学备考质量.

1 抓习惯就是抓发散，就是让学生达到“见一知多”的功效

问题 1 （多选题）已知函数 $y=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)(*)$ 的最小正周期为 π，则函数 $f(x)$ 的图象（ ）.

A. 关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

B. 关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称

C. 关于点 $\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$ 对称

D. 关于点 $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$ 对称

这道题目难度并不算大，但对该题的精细分析有利于提升学生的思维品质. 首先，题目条件是“最小正周期为 π”，部分教师直接写出 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，从而得到 $\omega=2$；其次，目标结论是对称轴和对称中心，而对称轴是利用 $\omega x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 求得的，于是对称轴为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}, k\in\mathbf{Z}$，再对照答案可知选项 B 正确. 同理可知选项 C 亦正确，故本题正确选项为 BC.

从表面上看，上述处理无可厚非，答案也已正确选出，但这样的处理让人有“头痛医头、脚痛医脚”之感，其解题过程也仅仅是一种对解答式的分析，无法起到“举一反三”的功效. 笔者认为将本题作为教学例题时应突出几个关键点：

(1) 本题题干条件是函数($*$)的最小正周期为 π，首轮复习不仅要让学生明白周期的含义，还要让学生明确函数($*$)的振幅、周期、对称中心、对称轴这几个关键量的求法以及它们的特征，以拓展学生的

教师团队需要更加关注校级报告显现出来的共性问题，以及班级间的差异和学生个性化的问题，寻找其根源，并力争解决共性问题和个性化问题，争取达到事半功倍的效果. 根据学生的学习报告，教师可以在较短的时间内发现症结所在，在和学生聊天的过程中，引导学生针对其个性问题制定复习计划. “学习报告”的引入，为靶向教学的开展奠定了基础，解决了传统教学中无法“面对每一个”“关注这一个”的现实难题，让教师对所有学生的情况了然于胸，为中考数学的复习教学开创了一条新的路径.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011 年版)[M]. 北京：北京师范大学出版社，2012：51.

[2] 余毅晖. 职业指导课程的靶向教学探索——基于校企合作的高职职业指导课程改革实践[J]. 教育教学论坛，2016(33)：10-11.

[3] 杨姗姗，张潇潇. 基于CBE理论的大学英语课程靶向教学可行性研究[J]. 智库时代，2019(36)：235-236.

[4] 蔡金法. 数学教育研究手册(第四册)[M]. 北京：人民教育出版社，2020：72-74.

[5] 裴光亚. 数学教师的专业发展：在书房与教室间穿行的教研人生[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2013：34-39.

[6] 鲍建生，周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海：上海教育出版社，2009：41-45.

思维；

(2) 应针对不同的题型采取不同的应对策略. 高考数学复习不仅是数学知识的复习过程，也是考试策略的训练过程. 本题是一个选择题，而且是一个多选题，理应先考虑选择题的特殊策略，而我们知道数学题的分析有定量分析和定性分析，我们习惯于进行定量分析，但如果我们在定量分析前能够进行适当的定性分析，往往会取得意想不到的效果.

我们可以对本题的分析作如下改进：首先复习函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象和性质，而后对图象特性分析探讨得出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的一般特性：函数图象的对称轴一定通过图象的最高点或最低点；函数图象的对称中心的纵坐标一定是零；两条对称轴之间的距离以及两个对称中心之间的距离一定是半周期的整数倍；对称中心到对称轴的距离一定是周期的 $\frac{2k+1}{4}(k\in\mathbf{Z})$ 倍等. 其次，针对多选题的特性可知所给四个选项中至少有两个是正确选项. 在明确了这两点后可以让学生分析四个选项的关系，我们可以发现直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 和直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 的距离是 $\frac{\pi}{4}$，它不是半周期 $\frac{\pi}{2}$ 的整数倍，故选项A，B不可能全对. 同理，点 $\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$ 和点 $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$ 之间的距离也是 $\frac{\pi}{4}$，它也不是半周期 $\frac{\pi}{2}$ 的整数倍，故选项C，D也不可能全对，于是我们只要在A与B和C与D之间各选一个正确选项即可. 再次，在判断A，B两个选项时也未必通过求函数对称轴再进行对比的方法求解，可以直接将 $x=\frac{\pi}{4}$ 代入函数表达式，看其结果是否为 A 或 $-A$，若是，则选项A正确；否则，选项B正确.

(3) 对本题的分析作上述改进后，其解题速度未必比定量求解快速，但数学复习重要的不是讲完多少道题目，重要的是通过复习让学生学到了什么，评判一节课的复习效率不是看教学容量而是看学生的学习任务是否圆满完成. 对一个数学问题的定性分析，有利于拓宽学生的解题思路，上述分析尽管可能减慢了复习进程，但通过多角度剖析使学生的思维得到了提升，达到了"一叶知秋"的功效，更何况首轮复习的精致到位有利于二、三轮复习的快速推进.

(4) 从上述第2点的分析可知，由于选项A，B不可能全对，同样选项C，D也不可能全对，而本题是一个多选题，因此在判断出选项B正确时，立即可知选项D错误(因为这个函数图象的对称中心不可能在对称轴上)，于是可知选项C正确. 这样，通过定性和定量的结合，避开了研究对称中心，圆满而又快速地解决本题.

2 抓习惯就是抓思维，就是让学生使用普遍规律解决问题

首轮复习切忌技巧性太强，但事实上很多教师往往热衷于解题技巧和解题套路的传授，将数学问题分成一个又一个碎片化的专题，这种专题化的复习策略在第一轮并不可取. 首轮复习应追求基础性知识的巩固，帮助学生构建知识网络，强化数学思维，让学生使用普遍规律解决问题而不是过早地追求所谓的"灵感".

问题2 已知单调递减的正数列 $\{a_n\}$ 满足：$a=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n^2(a_{n-1}+1)+a_{n-1}^2(a_n+1)-2a_na_{n-1}(a_na_{n-1}+a_n+1)=0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项；(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$S_n>2-\frac{1}{n}$.

本题给出的是一个递减正数列的递推关系，这里的关键词"递减""正"是什么意思？这应该让学生先用数学语言表达出来："递减"的含义是对 $\forall n\geqslant 2$，均有 $a_n<a_{n-1}$；"正数列"的意思是 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_n>0$.

递推关系给出了两个相邻项的关系，但这个关系并不对称也不是常见的几种递推关系之一，其基本思路是先将其化简，再观察其关系：

先将原式化为 $(-2a_{n-1}^2-a_{n-1}+1)a_n^2+(a_{n-1}^2-2a_{n-1})a_n+a_{n-1}^2=0$ ①，即 $(-2a_{n-1}+1)(a_{n-1}+1)a_n^2+(a_{n-1}^2-2a_{n-1})a_n+a_{n-1}^2=0$，$[(-2a_{n-1}+1)a_n-a_{n-1}][(a_{n-1}+1)a_n-a_{n-1}]=0$ ②. 由于对 $\forall n\geqslant 2$，均有 $a_n<a_{n-1}$ 且 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_n>0$，故 $(-2a_{n-1}+1)a_n-a_{n-1}=(a_n-a_{n-1})-2a_na_{n-1}<0$，于是 $(a_{n-1}+1)a_n-a_{n-1}=a_na_{n-1}+a_n-a_{n-1}=0$. 进一步得到 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=1(n\geqslant 2)$，故数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{a_1}=1$ 为首项、1为公差的等差数列，于是 $\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\times 1=n$，即 $a_n=\frac{1}{n}$.

思路回顾 本题的递推关系看似比较复杂，基础一般的学生很难直接看出其隐含的内在联系. 但递推关系的本质是数列的某两项满足的某一个关系式，本题给出的是相邻两项 a_n 与 a_{n-1} 的关系，其最终目的是要简化成 $a_n=f(a_{n-1})$ 的形式，于是将原式化为 ① 的形式，这实际是一个关于 a_n 的二次方程，

其中我们把 a_{n-1} 看成是一个普通的字母. 为了从 ① 式求出 a_n 的表达式，我们利用因式分解中的“十字相乘法”将 ① 式转化为 ② 式，而后利用条件判断出其中一个因式恒不为零，于是求出了 a_n 的表达式. 上述过程并不复杂，仅仅是求解含字母的一元二次方程而已，教师在分析时务必将这一思路讲清、讲透，在深入分析透彻的前提下由学生实施求解.

第(2) 题是一个证明题，但 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 无法被直接化简，而目标式是 $S_n>2-\frac{1}{n}$，显然这是一个不等式放缩问题，而这个不等式左边是多项式形式，右边只是一个二项式，可以猜测左边的每一项可以拆成若干项，其各项之间可以相互抵消，最终将目标指向 $2-\frac{1}{n}$. 这一想法实际上是基于拆项相消法这一基本策略. 此外，目标式是将前 n 项和 S_n 缩小，于是应该将 S_n 中的每一项或部分项的分母放大，考虑到右式中有一个数字 2，自然想到左式第一项 1 保留，第二项 $\frac{1}{2}$ 也凑个 1，于是将 $\frac{1}{2}$ 写成 $\frac{1}{1\times 2}$，以后各项作类似变形，得到 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}$，于是 $S_n>1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}$.

无论从思维要求还是运算要求来看，本题中的两个小题都有一定的难度，但分析时还是从常规的想法入手，从学生思维的“最近发展区”出发，这是解题最普遍的规律. 只有熟练掌握了这种最基本的解题规律，学生才能真正做到“举一反三”. 思维的拓展离不开思维的基础，那种脱离了基本规律的所谓解题技巧往往是空中楼阁，不要相信解题过程中的“灵机一动”，真正的“灵机一动”是留给有准备的人的.

3 抓习惯就是抓基础，就是帮助学生节省考试时间成本

学生的学习离不开考试. 所谓考试，严格意义上说就是限定时间内的做题比赛，学生要在考场上考出理想成绩，就必须在规定时间内做对尽可能多的题目，而抓好基础有利于其在基础性题目上节省时间成本.

3.1 掌握好符号语言、文字语言和图形语言的相互转换

数学是一门具有较强抽象性的学科. 数学符号、数学概念、数学公式都是现实生活问题的高度抽象，学生对符号、概念、公式的熟悉程度直接影响其数学学习，因此，教师应帮助学生熟练掌握符号语言、文字语言和图形语言之间的相互转换. 如对函数单调递增的理解，不仅要求学生能熟练记住单调递增概念的书面表达，更重要的是要将单调性和初中数学教学中的函数值变化情况建立联系，即单调递增的含义就是自变量 x 增大，对应的函数值 y 也增大，反之，自变量 x 减少，对应的函数值 y 也减少；而从图象上看，要求学生明确单调递增就是对应的函数图象从左到右逐渐往上. 单调递增和单调递减反映了自变量 x 和对应的函数值 y 之间的不等转化关系.

3.2 理解重要数学概念的变式应用

数学中有很多概念，有些概念抽象性强，有些概念具有多种变式. 第一轮复习中应帮助学生从不同角度理解同一数学概念，以使学生更深刻地理解概念. 以偶函数概念为例，对偶函数的理解不仅要让学生记住概念，更要让学生用通俗的语言理解偶函数的概念：即当任意两个自变量互为相反数时，其对应的函数值相等；反之，若对于任意两个互为相反数的自变量，它们所对应的函数值相等，则函数 $f(x)$ 图象关于 y 轴对称，函数 $f(x)$ 是偶函数. 在此基础上可以将结论一般化：若对定义域内的任何两个自变量 x_1，x_2，当 $x_1+x_2=2a$ 时，它们对应的函数值相等，即 $f(x_1)=f(x_2)$，那么函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称. 对奇函数也可以作同样的变式理解. 当学生理解了上述结论后，还可以帮助其进一步快速理解如下结论：若函数 $f(x)$ 定义域为 D. (1) 若 $\forall x\in D$，都有 $f(2-x)=f(x-2)$，函数 $f(x)$ 是偶函数；(2) 若 $\forall x\in D$，都有 $f(2-x)+f(x-2)=0$，函数 $f(x)$ 是奇函数；(3) 若 $\forall x\in D$，都有 $f(2-x)=f(x+2)$，函数 $f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称；(4) 若 $\forall x\in D$，都有 $f(2-x)+f(x+2)=2$，函数 $f(x)$ 关于点(2,1) 对称.

3.3 熟悉常见的转化技能

数学问题的解决过程实际上是在若干个不同问题之间进行等价转换的过程，它是通过将陌生问题转化为熟悉问题、将未知问题转化为已知问题，最终实现问题解决的过程. 而要实现这种转换，需要学生对问题进行客观理性的分析，同时也需要掌握一些常见的转化技能，如：凡遇正弦、余弦的二次齐次式，立即补分母“1”，而后将 1 转化为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$；凡

见 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，立即想到 $f(x)=\tan x$ 这一模型函数（从而猜想 $f(x)$ 可能为奇函数）；凡遇数列中涉及 a_n，a_{n+2} 的关系式，立即想到应用奇偶分析法研究数列通项等.

3.4　熟记常见的特效数字

数学是一门具有高度抽象性的学科，但在数学学习过程中学生仍然需要记住一些常见的特效数字，记住这些数字可以帮助我们快速解决一些基础性问题，为解决后续题目赢得考试时间.

问题3　已知 A 是 $\triangle ABC$ 的一个内角，且 $\sin A+\cos A=\frac{1}{5}$，则 $\tan A=$______.

这是一道很基础的题目，但如果学生通过平方和关系，利用方程组思想直接求出 $\sin A$，$\cos A$ 的值就不是明智之举. 比较简易可行的想法是角 A 的正弦、余弦和为 $\frac{1}{5}$，其分母为 5，立即联想到一组勾股数 3，4，5，于是 $\sin A$，$\cos A$ 的值一个是 $\frac{4}{5}$，另一个是 $-\frac{3}{5}$. 再考虑到 A 是 $\triangle ABC$ 的一个内角，$A\in(0,\pi)$，于是必有 $\sin A=\frac{4}{5}$，$\cos A=-\frac{3}{5}$，于是 $\tan A=-\frac{4}{3}$. 上述思考不仅简便而且节省了许多解方程组需要的时间，为解决后面的综合问题赢得思考时间.

3.5　强化学生运算能力训练

运算能力是数学学习最基本也是最为重要的能力，运算能力的高低直接影响着数学学习的深度和进程. 高三第一轮复习务必把运算能力的培养作为复习的重中之重. 运算能力的培养需要一定量的训练，但不是死做，更不是靠题海战术. 复习时要让学生明确基本算理，并在训练过程中培养其自觉优化运算策略的能力. 运算能力的培养可从以下途径实施：首先要让学生明确并理解运算所需要的概念和公式，其次要让学生积累一些需要记住的基本结论，再次是要在课堂教学中注意运算过程的示范并不断渗透. 特别重要的一点是运算示范中要注意运算中推理能力的培养，平时要注意多角度思考并在比较过程中寻求最优运算方式，只有平时强化了最优化思维，学生才能在考场上快速寻找最佳运算途径.

3.6　凸显数学知识的相互联系，从整体上理解数学结论

数学中有很多公式，它们看似繁而多，但很多情况下它们是有内在联系的，在首轮复习过程中教师要善于帮助学生归纳并从整体上把握数学概念和公式，理解数学结论. 如三角函数中的诱导公式，教材中出现了几十个，教师要讲清楚其本质是“将两个相关角的三角函数值转化为相同角的三角函数值”，这里的相关角是指两个角的和或差正好相差 $\frac{\pi}{2}$ 的整数倍. 尽管公式很多，但要求学生在一定量的训练和归纳基础上明确“奇变偶不变、符号看象限”即可；再如三大圆锥曲线既然有统一定义，它们的性质应该有许多相似的形式，事实上椭圆和双曲线，无论焦点在横轴上还是纵轴上，它们的方程都具备 $mx^2+ny^2=1$ 的形式，将焦点在横轴上的椭圆的所有公式中字母 x，y 互换就得到焦点在纵轴上的椭圆的相应结论. 同时，要让学生理解它们之所以存在这样的关系，实际上是因为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ 是关于直线 $y=x$ 对称这一原因造成的. 高中数学中类似的相关性结论还有许多，教师要培养学生数学学习中的整体把握能力.

4　抓习惯就是抓规范，就是实现“会而对、对而全”的有效策略

每次考试结束，许多学生会发现明明会的题目做错了，明明做对的题目教师没有给全分，这就是通常所说的“会而不对，对而不全”. 要有效防止这一现象，最根本也是最有效的策略就是抓规范，而学生的规范性思维和规范性书写也是一种习惯. 我们知道数学教学离不开解题教学，学生的数学学习离不开解题训练，而解题教学是培养学生规范思维和规范书写的最佳途径. 可现实情况是许多教师不会讲题，他们为了追求所谓的大容量而采取了解答式的解题教学，他们只重视解题过程，忽视了审题和设计这一更重要的环节. 特别是在 PPT 支撑下的课堂教学，许多教师习惯将题目显示在 PPT 上，学生还没看清题目就开始讲解，讲解完毕又不对解题过程进行必要的反思. 更有甚者，打着“熟能生巧”的幌子热衷于题海训练，把学生作为解题的机器. 波利亚在《怎样解题》中强调，解题过程包括审题、设计解题计划、实施解题计划以及解题反思这四个步骤，教师在例题讲解时应该整体呈现这四个环节，缺一不可.

抓习惯的第二个重要方面是抓学生书写的规范，规范的书写是高考得分的保证，但学生规范的书写不是靠说教而是通过教师的示范实现的. 可惜的是，许多教师在课堂教学中并不重视规范书写的示范性，有的教师板书混乱缺乏美感，有的教师仅仅板书主要过程或思路，有的教师将答案直接呈现在 PPT 上，课堂中缺少边板书边思考的过程性教学. 因此，建议在首轮复习过程中，教师务必重视板书的示范性，将规范的思考过程和书写格式呈现给学生.