关注生之误 谋划教之变

任晓松

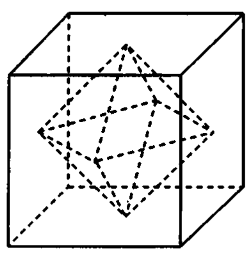
(苏州市吴江区教研室 215200)

纠正学生的错误,是教学中一项常规工作,在讲解学生错题时,如果只从问题的正确解答过程去分析,而不是引导学生思考,忽视对错误原因的梳理,将错失教育的良机,直接阻碍问题的根本解决.通过错题教学,不仅要让学生知道自己错了,还要让他们知道为什么错.而教师则不限于此,还应该知道其中更深层次的原因,比如知识结构的缺陷、元认知的缺陷、系统性的能力缺陷等等.

辩证地看,学生在数学课中的错误是学生对数学知识不断理解和建构过程中的正常现象.[1]重视对学生错误的成因的分析,有依据、有针对性地对学生加以引导和矫正,既是“以学生为主体”教学理念的体现,也是使这一理念得以落实的具体措施.也就是说,它兼具教学观和教学法的功能,对于一线教师来说至为有用.概括地说,下面三点对于学生认识错误和改正错误至关重要:整体性认知、一般化认知、对比与变化.

1 整体思考,注重逻辑

例1 如图所示,正方体的棱长为2,以其所有面的中心为顶点的多面体的体积为______.



该题是2018年普通高等学校招生全国统一考试(江苏卷)的第10题,题目比较简洁,学生的解题思路也比较明确,就是将多面体分割成上、下两个一致的正四棱锥.

错误分析:这个题目错误的学生不多,学生错误的答案比较集中是4和$\frac{2}{3}$,与标准答案$\frac{4}{3}$相比,前者是正确答案的三倍,后者是正确答案的二分之一,这与学生在平时解答这类问题的不良解题习惯是密不可分的.学生对这类问题的解答喜欢眉毛胡子一把抓,看似是应用整体处理,但实质缺乏内在逻辑层次.设多面体的体积是V,$V=2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 1\right)=\frac{4}{3}$,这样缺乏层次感的解答,极易在一些细节上发生错误.从错误答案分析,前者的错误是误将三棱锥当作棱柱,后者的错误是误将正方形当作三角形.这类错误教师不能仅仅认为是学生粗心造成的,更为深层次的原因在于,学生的这种做法,将所有的思维点都混在一起,缺乏思维的逻辑层次,而造成学生某种程度上的思维紊乱或思维不足.

教学建议:整体思考的关键就是需要透过问题纷繁的表象,找到问题的本源来分析、思考.问题的解决就是矛盾论的体现,因而我们必须找到主要的矛盾,以此为抓手来思考.[2]对于这个题目,就是将多面体如何转化为可求几何体的模型,即分割为两个一致的正四棱锥求解,这个方向就是整体思考的结果.而解决问题的过程,教师应该指导学生要有层次感,要构筑解决问题的步骤,这些步骤要有明确的逻辑顺序.这个问题的解决可分为四个步骤:一、确定所求正四棱锥的底和高;二、求出其底的面积和高的值;三、将底面积和高的值代入相应的体积公式,并求解;四、求出多面体的体积.谋划步骤依赖于逻辑顺序的确立,著名数学教育学家G·波利亚在《怎样解题》一文中所提及的“拟定计划”、“实现计划”,它的作用就是让学生明晰解题步骤及要求.对于所确定的每个步骤,学生落实所需的思维比较单一、简单,有效防

止思维紊乱，有助于学生解决问题的效率和正确率. 这样的例子其实比比皆是，譬如对函数 $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ 求导，此处运算需要兼顾乘法的求导法则和三角函数的求导公式，但逻辑顺序是求导法则在先，应用三角函数求导公式在后，所以教学时建议先用法则，得到 $f'(x)=(\sin x)'\cdot\cos x+\sin x\cdot(\cos x)'$，再用求导公式，得 $f'(x)=\cos^2x-\sin^2x$. 由此可见，在整体思考的框架下，强调问题解决步骤的规划，有助于培养学生处理问题先后次序的逻辑感，而这种解题教学中培养学生的条理性，可以让学生终生受益，将极大影响其处事方式，这正是数学教学培养人逻辑特质的重要一面.

2 淡化技巧，强调通法

例 2 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，D 是 BC 的中点，若 $AD\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}BC$，则 $\sin B\sin C$ 的最大值为______.

该题是江苏省南京市 2020 届高三年级第三次模拟考试的第 14 题，是以三角形为背景求最值问题，难度较大. 分析题目，第一步是根据条件获得边角关系，学生也容易从向量角度出发，将 $AD\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}BC$ 转化为 $\overrightarrow{AD}^2\leqslant\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}^2$，这样转换，主要考虑向量中点公式 $\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$，结合边角关系和 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，可得 $b^2+bc+c^2\leqslant 2a^2$. 第二步，就是从获得的不等关系找寻方法，求 $\sin B\sin C$ 的最大值.

错误分析：大多数学生的答案是 $\frac{1}{2}$，从这个错误答案，教师可以知道学生的错误就是在第二步. 对于不等式 $b^2+bc+c^2\leqslant 2a^2$，学生结合结果一定会考虑用正弦定理将不等式转化为 $\sin^2B+\sin B\sin C+\sin^2C\leqslant 2\sin^2A$，接下去考虑基本不等式 $\sin^2B+\sin^2C\geqslant 2\sin B\sin C$ 再结合 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，从而得到错误答案. 学生的错误在于没有考虑基本不等式成立的条件，该问题中等号在 $\sin B=\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时成立，而在此条件下的三角形是不存在的.

教学建议：和学生交流，一些学生反应，他并非不知道此处用基本不等式是错误的，但他找不到其他合适的做法. 可见，对于这些学生，他发现了问题，但他没能够"再发现"办法去解决这个问题. 某些教师的讲解直接应用参考答案的做法，它将不等式 $b^2+bc+c^2\leqslant 2a^2$ 转化为 $\frac{b^2+c^2-2bc}{2bc}\leqslant\frac{a^2-bc}{2bc}$，然后不等式左边应用余弦定理，不等式右边应用正弦定理，可得 $\cos A\leqslant\frac{\sin^2A}{2\sin B\sin C}-\frac{1}{2}$，再代入 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，可得答案为 $\frac{3}{8}$. 参考答案的解答很漂亮，同时也极具创造性，但学生的疑问就在于为何要在不等式左边构造余弦定理，这样的课堂教学，学生的接受是盲目的、被动的. 分析最值问题解决的通法，构造不等式、应用基本不等式和构造函数是一些基本途径，对于这个问题，应用基本不等式被发现已经不适合，那么能否从构造函数上去思考. 基于结果，学生将不等式 $b^2+bc+c^2\leqslant 2a^2$ 转化为 $\sin^2B+\sin B\sin C+\sin^2C\leqslant 2\sin^2A$，此处如何将 $\sin^2B+\sin^2C$ 转化为 $\sin B\sin C$ 是问题的关键，学生错用基本不等式也是基于此考虑，考虑完全平方公式，固然可以找到两者的关联，但由于 $\sin B+\sin C$ 不是定值，无助于问题的解决. 正确的做法是应用余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 的变式 $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C\cos A$，代入 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，可得 $\sin^2B+\sin^2C=\sin B\sin C+\frac{3}{4}$，再将该式代入前面不等式即可求解. 对于这个问题，在应用基本不等式这个解决问题的办法行不通的结果下，从应用函数求最值问题的通法入手，通过变量归一的方法，学生就能够"再发现"该题的解决办法，函数思想是该解答办法之"源". 此处再回顾参考答案的解答，学生就可以明白，其在不等式左边构造余弦定理，也是意在变量归一，参考答案的做法是将 b^2+c^2 转化为 bc，两者是殊途同归. 经过这个教学历程，学生从"迷茫"到"懂得"，最后到"通透"，体会数学之美和数学之巧，对于这类问题也能有更加深刻的理解. 解题教学中重视通法，目的是让学生建立上位概念，使其产生一般化认知，错误在用上位概念来的视角下才能看清

楚.譬如一些学生对于命题"若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}-a_n=2(n\geqslant 2$且$n\in \mathbf{N}^*)$,则$\{a_n\}$是等差数列"判断有误,固然他是受"$a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant 2$且$n\in \mathbf{N}^*)$"这种结构的影响,但究其原因,还是他没有充分理解等差数列的概念,也就是他对于上位概念有所缺失.如果一个数列从第二项起,每一项与它的前一项的差等于同一常数,那么这个数列就叫做等差数列.可见等差数列概念中,明确"从第二项起,每一项"这个"全"和"差等于同一常数"的概念应用的关键,而在递推关系中,能否做到"全"就在于前几项特别是a_2-a_1的值是否满足要求(视递推关系的具体条件而定).学生只有切实理解等差数列概念,那么他面对其他递推模式,如$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2$且$n\in \mathbf{N}^*)$,他的判断就不会受结构的影响,这说明学生真正理解其上位概念,从而产生一般化认知.

3 重视对比,感受变化

例3 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$S_4=5S_2$,$a_2=2$,则$a_4=$______.

该题是2020年度苏锡常镇四市高三教学情况调研(二)的第8题,从试题来看,相当简单,但得分情况非常不理想,平均分只有1分左右,该小题的满分是5分,也就是说有百分之八十左右的学生都是做错的.这个题目的解题思路主要有两种:一是学生根据考虑等式$S_4=5S_2$的结构,用整体代换的思想,设该数列的公比为q,那么$S_4=S_2+q^2S_2$,从而求出q得解;二是利用基本量a_1和q,讨论q,$q=1$时等式$S_4=5S_2$不能成立,$q\neq 1$时等式$S_4=5S_2$可转化为$\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=5\cdot\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$,结合$a_1\neq 0$和$q\neq 1$,求出$q$得解.

错误分析:从两种解法来看,显然解法一更加简洁,解题过程数列的基本量和性质兼顾,学生也大多选择用这种解法解题,但大多数学生的犯错也在于此.在等式$S_2+q^2S_2=5S_2$的运算中,学生忽视考虑$S_2\neq 0$,而造成漏解,故很多学生的答案是32,而正确的答案是2或32.那么,错误仅仅是因为学生未分类讨论而造成吗?事实上,教学中教师对等式的两边约去同一个数,该数必须不为0,则新等式仍然成立,强调非常多.而另一些学生用解法二解答,在等式$\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=5\cdot\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$的运算中,也需要考虑$q^2=1$的解,从结果来看,这部分学生也很少犯错.可见,未分类讨论,只是错误呈现的一个表象,但非真正的原因所在.通过对学生访谈,学生对未考虑$S_2\neq 0$的原因主要有两点:一是小部分学生认为,等式要求解的值是q而非S_2,因此对S_2未多加考虑;二是大多数学生反映,直觉S_2的值不应该为0.可见,学生直觉认为S_2的值不应该为0,是该题错误解答的问题所在,而这一错误正是李善良教授在"数学概念学习中的错误分析"所指的"合理性"错误."合理性"错误,指用原来的思维审视新的概念,按过去的经验、结论、方法对概念做"合理"的推广,不自觉地对思维进行限制等错误.[3]学生之所以直觉认为S_2的值不应该为0,是因为等比数列的一个结论,等比数列的公比和任何一项均不为0,这个结论对S_2的值的思考产生负迁移,学生潜意识中把S_2作为数列的一项,从而认为其一定不为0.

教学建议:根据"合理性"错误的概念,可见产生该错误的原因就在于合情推理应用上存在问题,而之所以应用合情推理,就是因为结构上存在"同",因此解决的办法就是重视对比不同,并析清原因.譬如不等式同乘原理,若$a>b$,$c>0$,则$ac>bc$,类似于这个结论的三个命题若"$a>b$,则$ac>bc$"、"若$a>b$,则$ac^2>bc^2$"和"若$a>b$,则$\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$",对于上述命题真伪的判断,不少学生会发生错误.这个问题属于概念应用,因此教师应先让学生注意"同",三个命题都属于不等式同乘原理的结构,学生发生错误的一个重要原因是在于三个命题之间的思维相互迁移,学生缺乏对不等式同乘原理本质的认识.不等式同乘原理本质是不等式的两边同时乘上一个正数,不等号的方向不变.要厘清这个本质,教师可将这三个命题同时呈现,学生很容易从结构上找到同乘的数分别是"c","c^2","$\frac{1}{c^2}$",而是否适用不等式同乘原理,学生必须辨析所乘的数是否是一个正数.通过对比,学生消除三个命题之间思维相互迁移,让学生学会从问题的源头、数学的本质上去辨析问题,而这正是解决"合理性"错误的重要途径.数学教学中重视

对比，不应该仅仅是不同数学现象间的对比，教师还要注意引导学生关注同一数学现象在变化过程中的不变因素和可变因素. 譬如对于数列 $x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\cdots+xy^{n-1}+y^n(x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R})$ 求和，学生往往从其结构应用等比数列的求和公式得 $\frac{x^n\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^n\right)}{1-\frac{y}{x}}$，但这个答案存在的问题非常多. 求和是这个问题的要求，但这个数列是否是等比数列，需要考虑数列是否符合等比数列的概念，即要对 x、y 是否为 0 讨论. 在 x、y 均不为 0 的情况下，显然适用等比数列的求和，但公比 $\frac{y}{x}$ 与 1 的讨论，涉及到等比数列求和公式不同的适用情况. 即使在公比 $\frac{y}{x}\neq1$ 的条件下，这个数列求和中的项数是 n 还是 $n+1$ 需要认定，认为项数为 n 的同学，只是看到题目中幂的指数最大值是 n，而没有进一步思考，而明确项数既是等比数列求和公式应用的关键，也是学生的易错点. 在学生对问题探究的过程中，分析可变因素和不变因素的辩证关系是非常重要的，明晰可变因素的变化对问题解决的影响，强化对可变因素的分析和讨论，培养了学生分类处理问题的能力，有助于提高学生思考问题全面性的能力.

课堂教学中的差错是不可避免的，相较于正确的单一，差错则更加丰富多彩，教师能否从差错中悟出道理，它既是对于学生教学主体地位的体现，也是对自身教育智慧的度量. 著名特级教师华应龙指出，“差错的价值并不止于差错本身，而在于师生从中获得新的启迪.”[4]启迪何来？启迪来自于思考，在问题解决的过程中启发学生的哲学思考，将知识联系起来，从而弄清事物的含义，这既改变了教师的教学，也丰富学生的数学情感体验.

参考文献

[1]孙四周.“错误”是一种重要的教学资源[J]. 中国教育学刊 2012(3):79－81

[2]任晓松. 例谈高中数学教学中整体思维的应用[J]. 数学通报，2019，58(10):47－49

[3]李善良. 数学概念学习中的错误分析[J]. 数学教育学报，2002(8):6－10

[4]华应龙. 聆听儿童思维真实的声音——我的融错教育观[J]. 人民教育，2010(12):43－46

（上接第 57 页）

3.3　“思维可视化”是破解难点的有效方法

华东师范大学刘濯源教授指出：“思维可视化”是指运用一系列图示技术把本来不可视的思维（包括：思考方法和思考路径）呈现出来，使其有清晰可见的过程. 本节课中采用在坐标系中画阴影的方法来分析图像的分布，又在给出图像的最高点和对称轴后，破解“如何取点”、“如何列表”这一难题；采用“伸出你的手，画画看”和教者的形体示意，再用图形计算器加以验证，帮助学生理解“这样连线”的理由，破解“如何连线”这一难题；对照二个函数图像，结合函数表达式的特征，破解函数的最大值和增减性这一难题，这样的“可视化”教学过程，既可提升学生的学习能力，又能有效提升教学效能.

3.4　注重通性通法才是好的数学教学

章建跃博士认为：“通性”就是概念所反映的数学基本性质，“通法”就是概念所蕴含的思想方法[5]. 本节课中，结合三大函数的图像，分析三类图像特征形成的原因，理解三大函数之间的区别和联系，提炼描述一般函数性质的角度，再用这些角度步骤化、层次化、可视化去推测新函数图像的特征，倒逼图像的长相，形成探究函数特征的“通性通法”，这样的教学有助于学生把握研究问题的规律，探求数学的本质，提炼数学思想，提升能力水平，落实数学课程的育人功能，使学生真正从“长期利益”中得到好处.

参考文献

[1]王亮亮. 中考数学改革对初中数学教学的反拨作用[J]. 数学通报，2016.5，10－14

[2]张长贵，钱军先. 让知识在问题解决中深化 使能力在探究活动中提升[J]. 数学通报，2016.2，20－24

[3]王成刚，王克亮. 数学课堂教学中问题驱动的实施策略[J]. 教学与管理，2019.10，60－62

[4]王成刚，王克亮. 基于问题驱动的单元复习的实践[J]. 数学通报，2018.9，50－52

[5]章建跃. 章建跃数学教育随想录[M]. 浙江：浙江教育出版社，2019