江苏省仪征中学高一第二学期数学周练（4）

答案和解析

【答案】

1. A　2. B　3. D　4. D　5. B　6. D　7. C

8. A　9. ABC　10. BCD　11. ACD　12. ABD

13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. $\sqrt{5}$

15. $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

16. $2\sqrt{3}$

17. 解：(1)当 $a=-1$ 时，直线l_1的斜率不存在，直线l_2的斜率为$\frac{1}{2}$，l_1与l_2既不平行，也不垂直，

当 $a\neq-1$ 时，直线l_1的斜率为$-\frac{1}{1+a}$，直线l_2的斜率为$-\frac{a}{2}$，

因为$l_1//l_2$，

所以$-\frac{1}{1+a}=-\frac{a}{2}$，解得 $a=1$ 或 $a=-2$．

当 $a=1$ 时，直线l_1：$x+2y=0$，l_2：$x+2y+6=0$，l_1与l_2平行，

当 $a=-2$ 时，直线l_1与l_2的方程都是 $x-y-3=0$，此时两直线重合，

故 $a=1$．

(2)因为$l_1\perp l_2$，

所以$(-\frac{1}{1+a})\times(-\frac{a}{2})=-1$，解得 $a=-\frac{2}{3}$.

经检验 $a=-\frac{2}{3}$符合题意，

故 $a=-\frac{2}{3}$.

18. 解：(1)由 $4S=a^2+c^2-b^2$，得 $4\times\frac{1}{2}ac\sin B=2ac\cos B$，

所以 $\tan B=1$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$.

(2)在$\triangle ABD$ 中，由正弦定理$\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$，

得$\sin\angle BAD=\frac{BD\cdot\sin B}{AD}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又因为 AD 平分$\angle BAC$，所以 $\cos\angle BAC=1-2\sin^2\angle BAD=\frac{1}{3}$，

所以 $\sin\angle BAC=\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

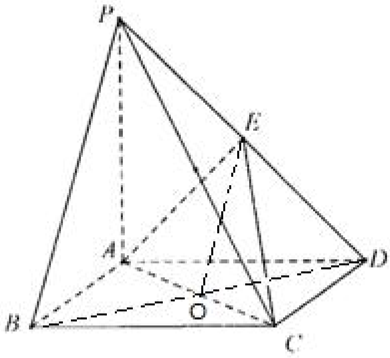
所以 $\cos C=\cos(\frac{3\pi}{4}-\angle BAC)$

$$=\cos\frac{3\pi}{4}\cos\angle BAC+\sin\frac{3\pi}{4}\sin\angle BAC$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

19. 证明：(1)连接 BD 交 AC 于 O，连结 OE，
因为 $ABCD$ 是平行四边形，所以 O 是 BD 的中点，
因为 E 为 PD 的中点，所以 $OE//PB$，
又因为 $PB\not\subset$平面 AEC，$OE\subset$平面 AEC，
所以 $PB//$平面 AEC.



(2)因为 $PA=AD$ 且 E 是 PD 的中点,所以 $AE\perp PD$，
又因为$PA\perp$平面$ABCD$,$CD\subset$平面$ABCD$,所以$PA\perp CD$，
因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $CD\perp AD$，
因为 PA，$AD\subset$平面 PAD，且 $PA\cap AD=A$，
所以 $CD\perp$平面 PAD，又因为 $AE\subset$平面 PAD，所以 $CD\perp AE$，
因为 PD，$CD\subset$平面 PDC 且 $PD\cap CD=D$，
所以 $AE\perp$平面 PCD.

20. 解：(1)设圆的一般方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

将 $A(1,2)$，$B(2,1)$，$C(2,3)$三点坐标代入得$\begin{cases}1+4+D+2E+F=0\\4+1+2D+E+F=0\\4+9+2D+3E+F=0\end{cases}$，

解得 $D=E=-4$，$F=7$，
所以圆的一般方程为$x^2+y^2-4x-4y+7=0$；
(2)由(1)知圆的一般方程为$x^2+y^2-4x-4y+7=0$，
将其配方得$(x-2)^2+(y-2)^2=1$，
所以圆心为$(2,2)$，半径为 $r=1$，
当斜率 k 不存在时，即 $x=1$ 时，显然符合题意，
当斜率 k 存在时，设点 $P(1,0)$的直线 l 与圆 E 相切的直线方程为：$y=k(x-1)$，

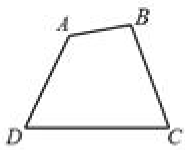
可得圆心$(2,2)$到直线 l 的距离 $d=\frac{|2k-2-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

解得 $k=\frac{3}{4}$,

直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{4}(x-1)$，即 $3x-4y-3=0$，

综上所述直线 l 的方程为：$x=1$ 或 $3x-4y-3=0$.

21. 解：(1)在$\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$BC=4$，$\angle B=120°$，
所以由余弦定理得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\times BC\times cosB}=2\sqrt{7}$，



在$\triangle ACD$ 中，$AC=2\sqrt{7},CD=5$，$cosD=\frac{1}{5}$,

所以由余弦定理得$\sqrt{AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\times cosD}=AC$，即$\sqrt{AD^2+5^2-2AD}=2\sqrt{7}$，
解得 $AD=3$.
(2)在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=20-16cosB$，
在$\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $AC^2=34-30cosD$，
所以 $20-16cosB=34-30cosD$，即 $15cosD-8cosB=7$，

而面积 $S=\frac{1}{2}(15sinD+8sinB)$，

所以 $4S^2+49=225+64-240cos(B+D)$，即$S^2=60-60cos(B+D)$，
所以$S^2=60-60cos(B+D)\le 120$，

所以当 $B+D=\pi$时，即 $cosD=\frac{7}{23}$，$cosB=-\frac{7}{23}$时，四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $2\sqrt{30}$，

②$\lambda\le 2\sqrt{14}$，
提示：$S^2=60-60cos(B+D)$，下面研究$\angle B+\angle D$ 的范围.
当$\angle D$ 增大时，AC 增大，从而$\angle B$ 随之增大，所以，当 A，B，C 趋于共线时，$\angle B+\angle D$ 趋于$\pi+\alpha$，

其中钝角α满足 $cos\alpha=-\frac{1}{15}$;

当$\angle D$ 减小时，AC 减小，从而$\angle B$ 随之减小，所以，当 A，B，D 趋于共线时，$\angle B+\angle D$ 趋于$\pi-\beta$，

其中锐角β满足 $cos\beta=\frac{2}{5}$，

所以$\angle B+\angle D\in(\pi-\beta,\pi+\alpha)$，
令$S^2=f(x)=60-60cosx$，则 $f(x)$在$(\pi-\beta,\pi)$上递增，在$(\pi,\pi+\alpha)$上递减，
并且 $f(\pi-\beta)=84$，$f(\pi+\alpha)=56$，$f(\pi)=120$，
所以$S^2=f(x)\in(56,120]$，即 $S\in(2\sqrt{14},2\sqrt{30}]$，
所以$\lambda\le 2\sqrt{14}$.

22. 解：(1)由题意，知圆心 O 到直线 $x-y+2\sqrt{2}=0$ 的距离 $d=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2=r$，
所以圆 O 的方程为$x^2+y^2=4$.

(2)若直线 l 的斜率不存在，则直线 l 的方程为 $x=1$，
此时圆 O 截直线 l 所得的弦长为 $2\sqrt{3}$，符合题意.

若直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y-\frac{\sqrt{3}}{3}=k(x-1)$，

即 $3kx-3y+\sqrt{3}-3k=0$.

由题意，知圆心 O 到直线 l 的距离$d_1=\frac{|\sqrt{3}-3k|}{\sqrt{9k^2+9}}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，

所以 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则直线 l 的方程为 $x+\sqrt{3}y-2=0$.

所以直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $x+\sqrt{3}y-2=0$

(3)设 $A(x_A,0)$，$B(x_B,y_B)$.由题意知 $A(-2,0)$，则直线 AB 的方程为 $y=k_1(x+2)$，

由$\begin{cases} y=k_1(x+2) \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$，得$(1+k_1^2)x^2+4k_1^2x+4k_1^2-4=0$，

所以$x_Ax_B=\frac{4k_1^2-4}{1+k_1^2}$，

所以$x_B=\frac{2-2k_1^2}{1+k_1^2}$，$y_B=\frac{4k_1}{1+k_1^2}$，即 $B(\frac{2-2k_1^2}{1+k_1^2},\frac{4k_1}{1+k_1^2})$，

因为$k_1k_2=-2$，用$\frac{-2}{k_1}$代替 B 坐标中的k_1，得 $C(\frac{2k_1^2-8}{4+k_1^2},\frac{-8k_1}{4+k_1^2})$，

所以直线 BC 的方程为 $y-\frac{-8k_1}{4+k_1^2}=\frac{\frac{4k_1}{1+k_1^2}-\frac{-8k_1}{4+k_1^2}}{\frac{2-2k_1^2}{1+k_1^2}-\frac{2k_1^2-8}{4+k_1^2}}(x-\frac{2k_1^2-8}{4+k_1^2})$，

即 $y-\frac{-8k_1}{4+k_1^2}=\frac{3k_1}{2-k_1^2}(x-\frac{2k_1^2-8}{4+k_1^2})$，即 $y=\frac{3k_1}{2-k_1^2}x+\frac{2k_1}{2-k_1^2}=\frac{3k_1}{2-k_1^2}(x+\frac{2}{3})$，

所以直线 BC 恒过定点$(-\frac{2}{3},0)$.

【解析】

6. 【解答】解：因为$D_1A_1\perp$平面 ABB_1A_1，$D_1A_1\subset$平面D_1A_1P，
所以平面$D_1A_1P\perp$平面 ABB_1A_1，所以平面$D_1A_1P\perp$平面A_1AP，所以 ①正确;
连接 CD_1，点 M，N 分别为棱C_1C，C_1D_1的中点，则 $MN//CD_1$，
因为 $MN\not\subset$平面D_1A_1BC，$CD_1\subset$平面D_1A_1BC，所以 $MN//$平面D_1A_1BC，即 $MN//$平面D_1A_1P，所以 ②正确;
因为 $DC_1\perp$平面A_1BCD_1，所以 $DC_1\perp D_1P$，所以异面直线 DC_1与D_1P 所成的角为$90°$，所以 ③正确;

当 $0<A_1P<\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$\angle APD_1$为钝角，所以 ④错误.

故正确的结论有 3 个，
故选 D.

7. 解：$\because (a-b)(sinA+sinB)=(c-b)sinC$，由正弦定理可得：$(a-b)(a+b)=(c-b)c$，化为$b^2+c^2-a^2=bc$.

由余弦定理可得：$cosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，

$\therefore A$ 为锐角，可得 $A=\frac{\pi}{3}$，

$\because a=\sqrt{3}$，

$\therefore$由正弦定理可得：$\frac{b}{sinB}=\frac{c}{\sin(\frac{2\pi}{3}-B)}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，

$\therefore$可得：$b^2+c^2=(2sinB)^2+[2sin(\frac{2\pi}{3}-B)]^2=3+2sin^2B+\sqrt{3}sin2B=4+$

$2sin(2B-\frac{\pi}{6})$，

$\because B\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，可得：$2B-\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，

$\therefore \sin(2B-\frac{\pi}{6}) \in (\frac{1}{2},1]$，可得：$b^2+c^2=4+2sin(2B-\frac{\pi}{6}) \in (5,6]$.

故选：C.

8. 【解答】解：由圆的方程可知圆心为$(3,-5)$，

圆心到直线 $4x-3y=2$ 的距离 $d=\frac{|12-3\times(-5)-2|}{\sqrt{16+9}}=5$.

因为圆$(x-3)^2+(y+5)^2=r^2$上有且仅有两个点到直线 $4x-3y=2$ 的距离为 1，
所以$|5-r|<1$，解得 $4<r<6$，故选 A.

9. 【解答】

解:对于 A:根据线面垂直的性质定理,垂直于同一个平面的直线互相平行,可得若 $l\perp\alpha$，$m\perp\alpha$，则 $l//m$，所以 A 项是真命题;

对于 B：若 n 是 l 在β内的射影，可知 l 是平面β的斜线，可以过 l 上一点 P 作 $PO\perp\beta$，且 PO 交 n 于点 O(其中 P 在平面β外)，又 $m\subset\beta$，则 $m\perp PO$，

又 $m\perp l$，$PO\cap l=P$，所以 m 垂直于直线 l 和 PO 所在的平面，又 n 属于直线 l 和 PO 所在的平面，所以 $m\perp n$，故 B 项是真命题;

对于 C：若 $m\subset\alpha$，$n\not\subset\alpha$，$m//n$，根据线面平行的判定定理，可得 $n//\alpha$，由此可得 C 项是真命题;

对于 D：以α、β、r 是长方体过同一个顶点的三个面为例，可得若$\alpha\perp r$，$\beta\perp r$，此时α与β是相交的平面，由此可得 D 项是假命题.

故选：ABC.

10. 【解答】

解：设 $CD=x(x>0)$，则 $CB=2x$，

$\cos\angle CDB=\frac{9-3x^2}{6x}=\frac{3-x^2}{2x}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，得 $x=\sqrt{5}$，

所以 $CD=\sqrt{5},CB=2\sqrt{5}$，因为 $\cos\angle CDB=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\angle CDB=\sqrt{1-(-\frac{\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

故 A 错误;

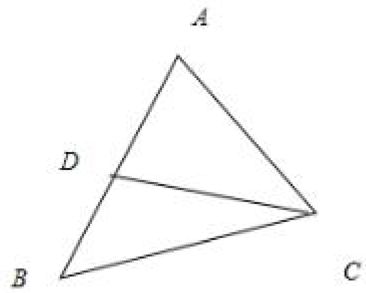
由余弦定理得 $\cos\angle CBD=\frac{3^2+(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times3\times2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\angle CBD=\sqrt{1-(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

故$S_{\quad ABC}=\frac{1}{2}CB\cdot BA\cdot\sin\angle CBD=8$，故 B 正确;

在 $\quad ABC$ 中，由余弦定理得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle CBD}=2\sqrt{5}$，
所以 $\quad ABC$ 的周长为 $8+4\sqrt{5}$，故 C 正确;

在 $\quad ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ACB=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\cdot AC}=-\frac{3}{5}<0$，所以$\angle ACB$ 为钝角，所以 $\quad ABC$ 为钝角三角形.故 D 正确.

故选 BCD.



11. 【解答】

解：对于 A：

∵点$(2,1)$在圆外，

$\therefore 2^2+1^2+2k+2+k^2-15>0$，

即$k^2+2k-8>0$，

解得 $k<-4$，或 $k>2$，故 A 正确；

对于 B：

圆心 $M(-cos\theta,sin\theta)$到直线 $kx-y=0$ 的距离：

$$d=\frac{|kcos\theta+sin\theta|}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$=|\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}cos\theta+\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}sin\theta|$$

$=|\sin(\theta+\varphi)|$，

其中 $sin\varphi=\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$，$cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，

$\because |\sin(\theta+\varphi)|\le 1$，∴直线与圆相交或相切．故 B 错误；

对于 C：

圆 C：$x^2+y^2-2y=0$，

即$x^2+(y-1)^2=1$，故圆心 $C(0,1)$，半径 $r=1$，

圆心 C 到直线 $2x+y+4=0$ 的距离 $d=\frac{5}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$，

即 $PC_{min}=\sqrt{5}$，

$\because PA=\sqrt{PC^2-r^2}$，$\therefore PA_{min}=2$，

$\because S_{四边形PACB}=2S_{Rt\triangle PAC}=2\times\frac{1}{2}PA\cdot r=PA$，

$\therefore (S_{四边形PACB})_{min}=2$，故 C 正确；

对于 D：

直线系 M：$xcos\theta+ysin\theta=2+2cos\theta$，

即$(x-2)cos\theta+ysin\theta=2$

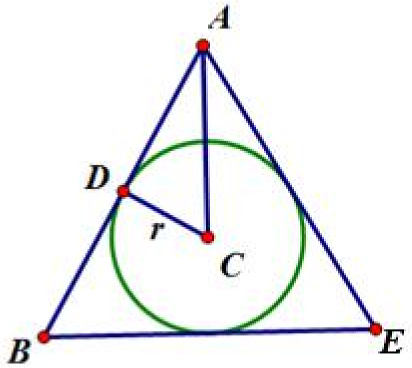
∵点$(2,0)$到直线的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=2$，

∴直线系 M 都是圆 C：$(x-2)^2+y^2=4$ 的切线，半径为 r

设$\triangle ABE$ 是 M 中的直线所能围成的一个正三角形，

则 $AC=2r=4$，$AB=2AD=2\sqrt{AC^2-r^2}=4\sqrt{3}$

$\therefore S=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=12\sqrt{3}$，故 D 正确．



故选 ACD.

12. 【解答】

解:

依题意,对 A,连接 BD,因为是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,故连接B_1D_1,因为 $BD//B_1D_1$,再连接 AB_1,显然易知三角形 AD_1B_1为等边三角形,故直线 AD_1与 BD 的夹角为 $60°$,故 A 正确;

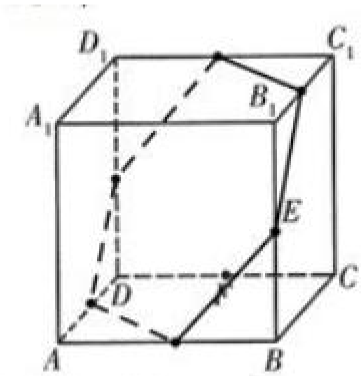
对 B,$D_1F\perp AD,D_1F\perp AE,AD\cap AE=A,AD,AE\subset 面ADE,则D_1F\perp 面ADE$,又$D_1F\subset$面$A_1FD_1$,

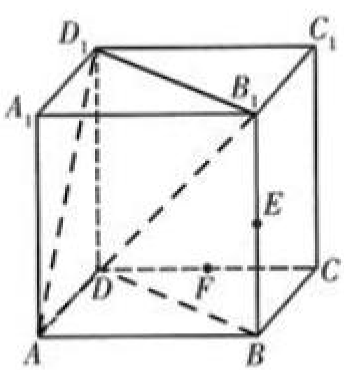
则平面 $AED\perp$平面A_1FD_1,故 B 正确;

对C,设点C_1到平面AB_1D_1的距离为h,$V_{C_1-AB_1D_1}=V_{A-C_1B_1D_1}\therefore\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1\therefore h=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 C 错误;

若正方体每条棱所在直线与平面α所成的角相等,易知α截此正方体所得截面只能是三角形和六边形,故 D 正确.

故选 ABD.





15. 【解答】

解:$\because$圆C_1:$x^2+y^2+4x+1=0$ 与圆C_2:$x^2+y^2+2x+2y+1=0$,

$\therefore$两圆相减可得公共弦方程为 l:$2x-2y=0$,即 $x-y=0$.

又$\because$圆C_1:$x^2+y^2+4x+1=0$ 的圆心坐标为$(-2,0)$,半径为$\sqrt{3}$;

圆C_2:$x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 的圆心坐标为$(-1,-1)$,半径为 1,

$\therefore$直线C_1C_2的方程为 $x+y+2=0$,

$\therefore$联立$\begin{cases}x-y=0,\\x+y+2=0,\end{cases}$可得以公共弦为直径的圆的圆心坐标为$(-1,-1)$,

$\because (-2,0)$到公共弦的距离为$\sqrt{2}$，

$\therefore$以公共弦为直径的圆的半径为 1，

$\therefore$以公共弦为直径的圆的方程为$(x+1)^2+(y+1)^2=1$．

16. 解：$\because \frac{4}{tanA}+\frac{3}{tanB}=1$，$\therefore \frac{4cosA}{sinA}+\frac{3cosB}{sinB}=1$，

$\therefore 4cosAsinB+3cosBsinA=sinAsinB$，

$\therefore 3cosAsinB+3cosBsinA=sinAsinB-cosAsinB$，

即 $3sin(A+B)=sinB(sinA-cosA)$，即 $3sinC=sinB(sinA-cosA)$，

$\therefore 3c=b(sinA-cosA)$，即 $c=\frac{b(sinA-cosA)}{3}$，

$\because \triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bcsinA=\frac{b^2(sinA-cosA)sinA}{6}=\frac{b^2}{6}(\sin^2A-cosAsinA)=\frac{b^2}{12}(1-sin2A-cos2A)=\sqrt{2}+1$，

$\therefore b^2=\frac{12(\sqrt{2}+1)}{1-sin2A-cos2A}=\frac{12(\sqrt{2}+1)}{1-\sqrt{2}\sin(2A+\frac{\pi}{4})}$，

$\because 3c=b(sinA-cosA)>0$，且 $0<A<\pi$，

$\therefore \frac{\pi}{4}<A<\pi$，$\therefore \frac{3\pi}{4}<2A+\frac{\pi}{4}<\frac{9\pi}{4}$，

$\therefore$当 $2A+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$即 $A=\frac{5\pi}{8}$时，b^2取得最小值$\frac{12(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{2}}=12$，

$\therefore b$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$．

故答案为：$2\sqrt{3}$．