

江苏省仪征中学 2019 届高考考前数学热身练 4

一. 填空题

1. 集合 $A = \{0, 1\}$ 的真子集的个数为_____.

2. 设复数 $\frac{z+2}{z-1} = i$, 其中 i 为虚数单位, 则 $|z|$
=_____.

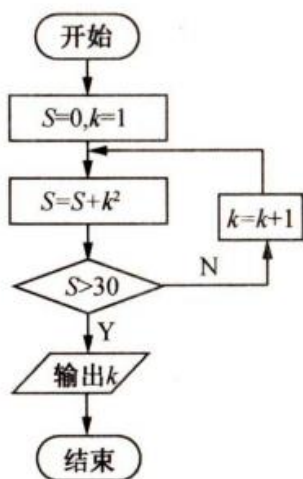
3. 若一组样本数据 2017, 2019, x , 2020, 2018 的平均数为 2019, 则该组样本数据的方差为_____.

4. 如图是一个算法流程图, 则输出的 k 的值为_____.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 点 $M(1, t)$ 在抛物线上, 则线段 MF 的长为_____.

6. 若函数 $f(x) = ax + \cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是_____.

7 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$, 点 F 在 CD 上, 线段 AC 与 BF 相交于点 E . 若 $\vec{AE} = 2\vec{EC}$, $\vec{AF} \cdot \vec{BF} = \frac{3}{5}$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ 的值为_____.

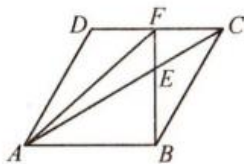


(第 4 题图)

8 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(1, 0)$, $B(4, 0)$. 若圆 $x^2 + (y-a)^2 = 1$ 上存在点 P 满足 $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{2}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

9 已知实数 x, y , 满足 $x^2 + y^2 \leq 3$, 则 $x + y - xy$ 的最大值为_____.

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 3x - x^3, & x \leq a, \\ 2x, & x > a. \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - a$ 恰有 3 个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是_____.



二. 解答题

1. 椭圆 $E: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点和右顶点分别是 A_1 和 A_2 , 下焦点和上焦点分别为 F_1 和 F_2 , 且四边形 $A_1F_1A_2F_2$ 是正方形. 直线 l 与椭圆 E 有且只

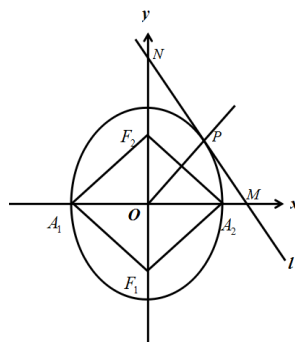
有一个公共点 P , 且直线 l 与 x 轴和 y 轴分别交于 M 、 N 两点.

(1) 求椭圆 E 的离心率;

(2) 求证: 直线 l 与直线 OP 的斜率之积是定值;

(3) 记正方形 $A_1F_1A_2F_2$ 的面积为 S_1 , ΔMNO 的面积为 S_2 , 求 $\frac{S_2}{S_1}$

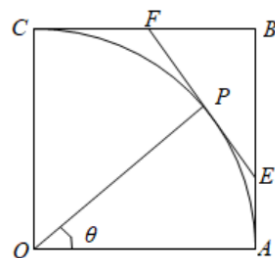
的最小值, 并求此时直线 l 的斜率.



2. 如图，公园里有一块边长为 1 百米的绿地区域 $OABC$ ，计划在以 O 为圆心， OA 为半径的四分之一圆内种植花草，其他区域种植苗木，现决定从 A 到 C 修建折线观赏路线 $AE - EF - FC$ ，其中 E, F 分别在线段 AB, BC 上，且 EF 与弧 $\widehat{AC}$ 相切于点 P ， AE, CF 为水泥路面，其工程造价为每米 a 元， EF 为鹅卵石路面，其工程造价是每米 $2a$ 元，修路的总造价是 W （单位：百元），设 $\angle AOP = \theta$ ，

(1) 用 θ 表示 EF 的长；

(2) 求 E, F 选在何处时，总造价 W 最低？



三. 附加题

1. 自极点 O 任意作一条射线与直线 $\rho \cos \theta = 3$ 相交于点 M , 在射线 OM 上取点 P , 使得 $OM \cdot OP = 12$, 求动点 P 的极坐标方程, 并把它化为直角坐标方程.

2. 在公园游园活动中有这样一个游戏项目: 甲箱子里装有 3 个白球和 2 个黑球, 乙箱子里装有 1 个白球和 2 个黑球, 这些球除颜色外完全相同, 每次游戏都从这两个箱子里各随机地摸出 2 个球, 若摸出的白球不少于 2 个, 则获奖. (每次游戏结束后将球放回原箱)

(1) 求在一次游戏中摸出 3 个白球的概率;

(2) 在两次游戏中, 记获奖次数为 X , 求 X 的数学期望.

答案:

1. 3 2. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 3. 2 4. 5 5. 3 6. $[1, +\infty)$ 7. $\frac{2}{5}$

8. $[-3, -1] \cup [1, 3]$ 9. 2 10. $[\sqrt{2}, 2)$

11. 解: (1) $\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots$ 4 分

(2) 由 (1) 得 $a = \sqrt{2}c = \sqrt{2}b$, 椭圆方程化简为 $\frac{y^2}{2b^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

又 $\because l$ 与 x 轴和 y 轴都相交 $\therefore l$ 的斜率存在且不为 0, 设 $l: y = kx + m$.

联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{y^2}{2b^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ 得 $(2 + k^2)x^2 + 2kmx + m^2 - 2b^2 = 0$

$\therefore \Delta = (2km)^2 - 4(2 + k^2)(m^2 - 2b^2) = 0 \therefore m^2 = 2b^2 + k^2b^2 = (2 + k^2)b^2 \therefore x_P = \frac{-km}{2 + k^2} = \frac{-kb^2}{m}$,

$\therefore y_P = kx_P + m = \frac{-k^2b^2}{m} + m = \frac{-k^2b^2 + m^2}{m} = \frac{2b^2}{m} \therefore k_{OP} = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{2b^2}{m}}{\frac{-kb^2}{m}} = -\frac{2}{k} \therefore k_{OP} \cdot k = -\frac{2}{k} \cdot k = -2$

$\therefore$ 直线 l 与直线 OP 的斜率之积是定值 -2

(3) 设 $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$, 由 $y = kx + m$, 令 $y = 0$ 得 $x_M = -\frac{m}{k}$, 令 $x = 0$ 得 $y_N = m$

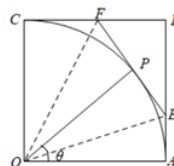
$\therefore S_2 = \frac{1}{2} OM \cdot ON = \frac{1}{2} |x_M| \cdot |y_N| = \frac{1}{2} |-\frac{m}{k} \cdot m| = \frac{1}{2} |\frac{m^2}{k}|$, 由 (2) 得: $m^2 = (2 + k^2)b^2$

$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{(2 + k^2)b^2}{2|k|}}{2b^2} = \frac{2 + k^2}{4|k|} = \frac{1}{2|k|} + \frac{|k|}{4} \therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2|k|} + \frac{|k|}{4} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2|k|} \cdot \frac{|k|}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 当且仅当

$\frac{1}{2|k|} = \frac{|k|}{4}$ 时即 $k = \pm\sqrt{2}$ 时取“=”

12 (1) 如图, 连接 OE , OF , $OP \perp EF$, $OA \perp AE$, 则

$\angle OPE = \angle OAE = 90^\circ$,



又 $OA = OP = 1$, OE 是公共边, $\triangle OAE \cong \triangle OPE$, 故 $AE = PE$, $\angle POE = \angle AOE = \frac{\theta}{2}$.

$$PE = \tan \frac{\theta}{2}, \quad PF = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \text{ 故 } EF = \tan \frac{\theta}{2} + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right), \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

(2)由(1)得 $CF = PF = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$, $AE = PE = \tan \frac{\theta}{2}$, 故 $AE + CF = EF$,

$$W(\theta) = a(CF + AE) + 2aEF = 3aEF = 3a\left[\tan \frac{\theta}{2} + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right], \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

求 W 最小即求 EF 最小,

$$\text{记 } f(\theta) = \tan \frac{\theta}{2} + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1 - \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan \frac{\theta}{2}}$$

$$\text{设 } 1 + \tan \frac{\theta}{2} = t \in (1, 2),$$

$$\text{则 } \tan \frac{\theta}{2} = t - 1, \quad f(\theta) = t - 1 + \frac{2-t}{t} = t + \frac{2}{t} - 2 \geq 2\sqrt{2} - 2$$

$$\text{当且仅当 } t = \frac{2}{t} \text{ 即 } t = \sqrt{2} \text{ 时取等, 此时 } \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{2} - 1, \quad AE = CF = \sqrt{2} - 1$$

$\therefore$ 当 $AE = CF = \sqrt{2} - 1$ 时, $W(\theta)$ 最小.

附加

1.解: 设 $P(\rho, \theta)$, $M(\rho', \theta)$, $\because OM \cdot OP = 12$, $\therefore \rho \rho' = 12$.

$\because \rho' \cos \theta = 3$, $\therefore \frac{12}{\rho} \cdot \cos \theta = 3$. 则动点 P 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$. (5 分)

$\because$ 极点在此曲线上, $\therefore$ 方程两边可同时乘 ρ , 得 $\rho^2 = 4\rho \cos \theta \therefore x^2 + y^2 - 4x = 0$.

2. 解: (1) 记“在一次游戏中摸出 3 个白球”为事件 A.

$$P(A) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^2 C_3^2} = \frac{1}{5}. \quad (3 \text{ 分})$$

(2) X 的所有可能取值为 0, 1, 2.

记“在一次游戏中摸出至少 2 个白球”为事件 B.

$$P(B) = P(A) + \frac{C_3^2 C_2^2 + C_3^1 C_2^1 C_2^1}{C_5^2 C_3^2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}.$$

$$P(X=0) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}, \quad P(X=1) = C_2^1 \cdot \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{21}{50}, \quad P(X=2) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{49}{100}.$$

$$\text{故 X 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{9}{100} + 1 \times \frac{21}{50} + 2 \times \frac{49}{100} = \frac{7}{5}. \quad (10 \text{ 分})$$