2021年普通高等学校招生全国统一考试(模拟)

数学试题参考答案及评分标准

2021.3

说明：

一、本解答只给出了一种解法供参考，如考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容参照评分标准酌情赋分。

二、当考生的解答在某一步出错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容与难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确答案应得分数一半；如果后继部分的解答有较严重的错误或又出现错误，就不再给分。

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.C 2.D 3.A 4.B 5.C 6.A 7.B 8.C

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

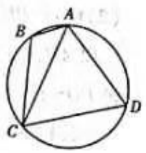
9.AB 10.BC 11.ACD 12.BCD

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $\log_a x$ $(a>1)$型的都对 14. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 15.5 16. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，$2x-3y+6=0$

四、解答题：

17.解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形



$\therefore \angle B+\angle D=\pi$ ………………………………………… 1分

又$\angle B=2\angle D$ $\therefore \angle B=\frac{2\pi}{3}$，$\angle D=\frac{\pi}{3}$ ………………………………………… 2分

在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=\frac{\pi}{12}$

$\therefore \angle BAC=\pi-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$ ………………………………………… 3分

由$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，得$AC=\frac{BC\sin B}{\sin\angle BAC}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{6}$ ………………………………………… 5分

在$\triangle ACD$中，由余弦定理，得

$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos D$

即$24=AD^2+CD^2-AD\cdot CD\geqslant 2AD\cdot CD-AD\cdot CD=AD\cdot CD$， ………………………………………… 7分

$\therefore S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CD\sin D=\frac{\sqrt{3}}{4}AD\cdot CD\leqslant 6\sqrt{3}$ ………………………………………… 9分

当且仅当$AD=CD$时，取“=”

即$\triangle ACD$面积的最大值为$6\sqrt{3}$. ………………………………………… 10分

18.解：若选①，则$2S_n=na_{n+1}$

当$n=1$时，$2S_1=a_2$，得$a_2=2$ ………………………………………… 1分

当$n\geqslant 2$时，$2S_{n-1}=(n-1)a_n$，

得$2a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n$，

即$(n+1)a_n=na_{n+1}$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$ ………………………………………… 3分

$\therefore a_n=\frac{n}{n-1}\times\frac{n-1}{n-2}\times\cdots\times\frac{2}{1}\times a_1=n$ ………………………………………… 5分

当$n=1$时也成立，

$\therefore a_n=n$. ………………………………………… 6分

若选②即$2S_n=a_{n+1}a_n$

当$n=1$时，$2S_1=a_2a_1$，得$a_2=2$ ………………………………………… 1分

当$n\geqslant 1$时，$2S_{n-1}=a_na_{n-1}$

得$2a_n=a_na_{n+1}-a_na_{n-1}$

由$a_n>0$，得$a_{n+1}-a_{n-1}=2$ ………………………………………… 3分

又$\because a_1=1$，$a_2=2$.

$\therefore \{a_{2n}\}$是公差为2，首项为2的等差数列，$\{a_{2n-1}\}$是公差为2，首项为1的等差数列 ………………………………………… 6分

故$a_n=n$

若选③，即$a_n^2+a_n=2S_n$

当$n\geqslant 2$时，$a_{n-1}^2+a_{n-1}=2S_{n-1}$

两式相减得$a_n^2+a_n-a_{n-1}^2-a_{n-1}=2a_n$，

即$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$ …………………… 3分

由$a_n>0$,得$a_n-a_{n-1}-1=0$

∴$\{a_n\}$是公差为1的等差数列

故$a_n=n$ …………………… 6分

(2)$b_n=(n+1)\cdot 2^n$ …………………… 7分

$T_n=2\times2+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+(n+1)\times2^n$

$2T_n=\quad 2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n+(n+1)\times2^{n+1}$ …………………… 8分

两式相减,得$-T_n=4+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\times2^{n+1}$ …………………… 9分

$=4+\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\times2^{n+1}$ …………………… 10分

$=4-4+2^{n+1}-(n+1)\times2^{n+1}$

$=-n\cdot2^{n+1}$

故$T_n=n\cdot2^{n+1}$ …………………… 12分

19.解:(1)用X表示4例疑似病例中化验呈阳性的人数,则随机变量$X\sim B(4,\frac{1}{3})$ …………………… 2分

由题意可知:$P(X=2)=C_4^2\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot(1-\frac{1}{3})^2=\frac{8}{27}$ …………………… 4分

(2)方案一:若逐个检验,则检验次数为4. …………………… 5分

方案二:混合一起检验,记检验次数为X,则$X=1,5$.

$P(X=1)=(1-\frac{1}{10})^4=\frac{81\times81}{10000}=\frac{6561}{10000}$,

$P(X=5)=1-P(X=1)=\frac{3439}{10000}$

$E(X)=1\times\frac{6561}{10000}+5\times\frac{3439}{10000}=\frac{23756}{10000}$ …………………… 7分

方案三:每组的两个样本混合在一起化验,若结果呈阴性,则检测次数为1,

其概率为$(1-\frac{1}{10})^2=\frac{81}{100}$; …………………… 8分

若结果呈阳性,则检测次数为3,其概率为$1-\frac{81}{100}=\frac{19}{100}$ …………………… 9分

设方案三检测次数为随机变量Y,则$Y=2,4,6$.

$P(Y=2)=\frac{81}{100}\times\frac{81}{100}=\frac{81\times81}{10000}=\frac{6561}{10000}$,

$P(Y=4)=\frac{81}{100}\times\frac{19}{100}\times2=\frac{2\times81\times19}{10000}=\frac{3078}{10000}$,

$P(Y=6)=\frac{19}{100}\times\frac{19}{100}=\frac{361}{10000}$, …………………… 10分

则$E(Y)=2\times\frac{81\times81}{10000}+4\times\frac{2\times81\times19}{10000}+6\times\frac{19\times19}{10000}=\frac{27600}{10000}$ …………………… 11分

由$E(X)<E(Y)<4$,

知方案二最优 …………………… 12分

20.(1)证明:如图,取AB的中点M,连结DM,DB,

∵$CD=\frac{1}{2}AB$,∴$CD=MB$,

∵$CD\parallel MB$,∴四边形$BCDM$为平行四边形,∴$DM=BC$, …………………… 1分

∵四边形$ABCD$是等腰梯形,$AB\parallel CD$,∴$DM=BC=AD$,

又$AD=CD=\frac{1}{2}AB=AM$,∴$\triangle AMD$为等边三角形,

∴$\angle DAM=\angle DMA=60°$,

∴在等腰$\triangle MBD$中,$\angle MBD=30°$ …………………… 2分

∴在$\triangle ADB$中,$\angle ADB=90°$,

不妨设$2PD=2AD=2CD=AB=PB=2$,则$BD=\sqrt{3}$,

在$\triangle PBD$中,$BD=\sqrt{3}$,$PD=1$,$PB=2$,∴$PD^2+BD^2=PB^2$,

∴$PD\perp BD$, …………………… 3分

又$PD\perp AD$,$AD\subset$平面$ABCD$,$BD\subset$平面$ABCD$,$AD\cap BD=D$,

∴$PD\perp$平面$ABCD$,

又$PD\subset$平面PAD,∴平面$PAD\perp$平面$ABCD$. …………………… 4分

(2)解:∵$PD\perp AD$,$PD\perp BD$,$AD\perp BD$,

∴以AD,BD,PD分别为x轴,y轴,z轴建立空间直角坐标系,如图: …………………… 5分

设$PD=1$∵平面PDE把四棱锥$P-ABCD$分成体积相等的两部分,

∴三棱锥$P-ADE$的体积等于四棱锥$P-BCDE$,

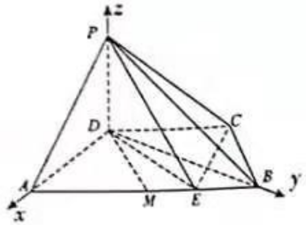
∴$\frac{1}{3}S_{\triangle ADE}\times PD=\frac{1}{3}S_{梯形DCBE}\times PD$,

∴$S_{\triangle ADE}=S_{梯形DCBE}$, …………………… 6分

设梯形$ABCD$的高为h,$AE=x$,则$\frac{1}{2}xh=\frac{1}{2}\times(2-x+1)h$,

解得 $x=\frac{3}{2}$. ………………………………………………………………………… 7分

则 $D(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $P(0,0,1)$,



$E(\frac{1}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},0)$, $C(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$.

$\overrightarrow{PC}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-1)$, $\overrightarrow{PE}=(\frac{1}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},-1)$ …… 9分

∵ y 轴⊥平面 PAD, ∴ 平面 PAD 的一个法向量为

$n=(0,1,0)$. ………………………………………… 10分

设平面 PCE 的一个法向量为 $m=(x,y,z)$, 则 $\begin{cases} m\cdot\overrightarrow{PC}=0 \\ m\cdot\overrightarrow{PE}=0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-z=0 \\ \frac{1}{4}x+\frac{3\sqrt{3}}{4}y-z=0 \end{cases}$,

以上两式相减得 $\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y=0$, 取 $x=-\sqrt{3}$, 则 $y=3$, $z=2\sqrt{3}$, ∴ $m=(-\sqrt{3},3,2\sqrt{3})$. ……

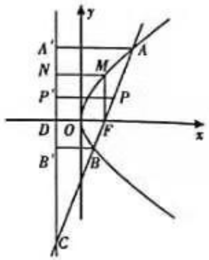
………………………………………………………………………………………… 11分

∴ $\cos\langle m,n\rangle=\frac{m\cdot n}{|m||n|}=\frac{3}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

∴ 平面 PAD 与平面 PCE 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$. ………………………………… 12分

21.(1)过 A, B 分别向 ND 作垂线, 垂足为 A', B', 设 AB 中点为 P, 过 P 向 ND 作垂线, 垂足为 P', 则 $|PP'|=\frac{1}{2}(|AA'|+|BB'|)=\frac{1}{2}|AB|$ ………………………………… 1分

又∵ $|AB|=|BC|$



∴ $|PP'|=\frac{1}{3}|PC|$ ……………………………………… 2分

在 $Rt\triangle PP'C$ 中, $\tan\angle P'PC=2\sqrt{2}$ ……………………… 3分

∴ 直线 l 的斜率为 $2\sqrt{2}$ ……………………………………… 4分

(2)∵ 正方形边长为1,

∴ $p=1$, 抛物线方程为 $y^2=2x$ ……………………………… 5分

∴ $M(\frac{1}{2},1)$, ………………………………………………………………………… 6分

设 $AB: y=k(x-\frac{1}{2})$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

∵ ND 方程为 $x=-\frac{1}{2}$, 得 $C(-\frac{1}{2},-k)$ ∴ $k_3=\frac{1+k}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1+k$. ……………………………… 7分

由 $\begin{cases} y=k(x-\frac{1}{2}) \\ y^2=2x \end{cases}$ 得 $4k^2x^2-(4k^2+8)x+k^2=0$ ……………………………………… 8分

$\Delta=(4k^2+8)^2-4\times4k^2\times k^2=64k^2+64>0$.

$x_1+x_2=\frac{4k^2+8}{4k^2}=\frac{k^2+2}{k^2}$, $x_1x_2=\frac{k^2}{4k^2}=\frac{1}{4}$. $k_1=\frac{y_1-1}{x_1-\frac{1}{2}}$, $k_2=\frac{y_2-1}{x_2-\frac{1}{2}}$ ……………………………… 9分

$$k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-\frac{1}{2}}+\frac{y_2-1}{x_2-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{(y_1-1)(x_2-\frac{1}{2})+(x_1-\frac{1}{2})(y_2-1)}{(x_1-\frac{1}{2})(x_2-\frac{1}{2})}$$

$$=\frac{[k(x_1-\frac{1}{2})-1]+[k(x_2-\frac{1}{2})-1](x_1-\frac{1}{2})}{x_1x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{2kx_1x_2-(k+1)(x_1+x_2)+\frac{k}{2}+1}{x_1x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}}$$ ……………………………………… 10分

$$=\frac{\frac{k}{2}-\frac{(k^2+2)(k+1)}{k^2}+\frac{k}{2}+1}{\frac{1}{4}-\frac{k^2+2}{2k^2}+\frac{1}{4}}$$

$=2(1+k)=2k_3$ ……………………………………………………………… 11分

即存在常数 $\lambda=2$, 使得 $k_1+k_2=2k_3$ 成立. ……………………………………… 12分

22.解: $f'(x)=(x+1)e^{x-1}+2(x+1)=(x+1)(e^{x-1}+2)$. ……………………………… 1分

当 $x\in(-\infty,-1)$, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x\in(-1,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. ························ 2分

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时 $f(x)$ 取最小值 $f(-1)=-5-\frac{1}{e^2}$. ························ 3分

(2)函数 $h(x)$ 定义域为 $(-1,+\infty)$，其中 $f(1)=0$. ························ 4分

(1)当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，则函数 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 无零点 ························ 5分

(2)当 $-1<x\leq 1$ 时，$f(x)\leq 0$.

下面讨论 $g(x)$ 零点情况.

$x-\ln(x+1)\geq 0$.(当 $x=0$ 时，取等号)，

$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}<\cos 1\leq\cos x\leq 1$， ························ 6分

①当 $a<0$ 时，$g(x)=a(\frac{1}{2}x^2+2\cos x)-[x-\ln(x+1)]<0$

此时，$g(x)$ 在 $(-1,1]$ 上无零点

$\therefore h(x)$ 的零点为 $x=1$.即一个零点.

②当 $a=0$ 时，$g(x)=-x+\ln(x+1)\leq 0$，$g(0)=0$，$g(1)=-1+\ln 2<0=f(1)$，

$g(x)$ 在 $(-1,1]$ 上一个零点，$h(x)$ 的有两个零点. ························ 7分

③当 $a>0$ 时，$g'(x)=ax-2a\sin x-1+\frac{1}{x+1}$

$\therefore g''(x)=a-2a\cos x-\frac{1}{(x+1)^2}$

$=a(1-2\cos x)-\frac{1}{(x+1)^2}$

$\because 1-2\cos x<0$. $\therefore g''(x)<0$.

$\therefore g'(x)$ 在 $(-1,1]$ 单调递减，

又 $g'(0)=0$.

$\therefore g(x)$ 在 $x=0$ 取极大值，此时 $g(0)=2a>0$.

又 $\because x\to -1$ 时，$\ln(x+1)\to-\infty$，

$\therefore g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上有一个零点， ························ 8分

又 $g(1)=\frac{1}{2}a+2a\cos 1-1+\ln 2$

当 $g(1)>0$，即：$a>\frac{2-2\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，$g(x)$ 在 $(-1,1]$ 上有一个零点，$h(x)$ 有两个零点 ··· 9分

当 $g(1)=0$，即 $a=\frac{2-2\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，$g(x)$ 在 $(-1,1]$ 上有两个零点，$h(x)$ 有两个零点 ········

························ 10分

当 $g(1)<0$，即 $a<\frac{2-2\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，$g(x)$ 有两个零点，$h(x)$ 有三个零点 ················ 11分

综上，$a<0$ 时或 $a>\frac{2-2\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，$h(x)$ 有一个零点.

当 $a=0$ 时或 $a=\frac{2-2\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，$h(x)$ 有两个零点.

当 $0<a<\frac{2-2\ln 2}{1+4\cos 1}$ 时，$h(x)$ 有三个零点. ························ 12分