

数学 I

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分。请把答案填写在答题卡相应位置上。

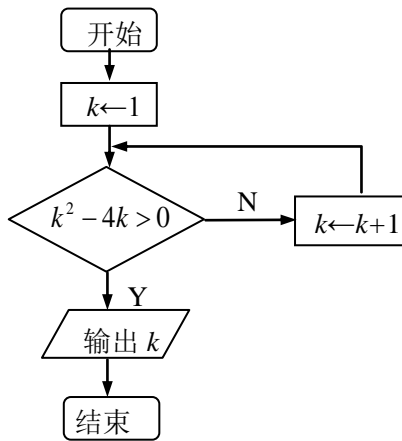
1. 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, 3\}$, 若 $A \cap B = \{1\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

2. 函数 $f(x) = \lg(x^2 - 2x - 3)$ 的定义域为_____.

3. 已知复数 z 满足 $z \cdot i = 1 + i$ (i 是虚数单位), 则复数 z 的模为_____.

4. 右图是一个算法流程图, 则输出的 k 的值是_____.

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(f(-2)) =$ _____.



(第 4 题)

6. 若 “ $|x - a| \leq 1$ ” 是 “ $x \leq 2$ ” 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围为_____.

7. 已知函数 $y = \ln x + a$ 的图象与直线 $y = x + 1$ 相切, 则实数 a 的值为_____.

8. 已知函数 $y = \sin(2x + \varphi)$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 在 $x = \frac{\pi}{6}$ 时取得最大值, 则 φ 的值是_____.

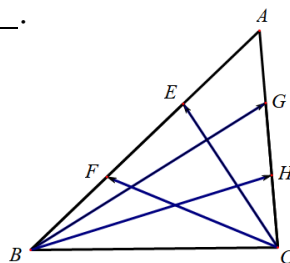
9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知角 α 的终边经过点 $A(1, 2)$, 将角 α 的终边绕原点按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 与角 β 的终边重合, 则 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值为_____.

10. 将一个半径为 2 的圆分成圆心角之比为 1:2 的两个扇形, 且将这两个扇形分别围成圆锥的侧面, 则所得体积较小的圆锥与较大圆锥的体积之比为_____.

11. 已知正实数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 则 $\frac{3x}{x-1} + \frac{4y}{y-1}$ 的最小值为_____.

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边, E, F 是 AB 上的两个三等分点, G, H 是 AC 上的两个三等分点,

$(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CE}) \cdot (\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{CF}) = -\frac{10}{9}$, 则 $b \cos C$ 的最小值为_____.



(第 12 题)

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 直线 $l: y = x + a$, 过直线 l 上点 P 作圆 O 的切线 PA, PB , 切点分别为 A, B , 若存在点 P 使得 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - |x - a|, & x \geq -1 \\ x^2 - 2ax + 2, & x < -1 \end{cases}$ (e 是自然对数的底数) 恰有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

二、解答题: 本大题共 6 小题, 共计 90 分解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 14 分) 已知向量 $\mathbf{a} = (2\cos\theta, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 2\sin\theta)$ 且 $\theta \in (0, \pi)$.

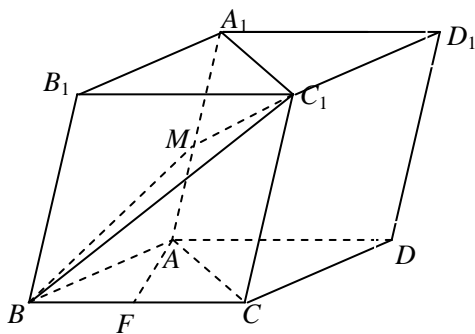
(1) 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 求 θ 的值;

(2) 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{2}{5}$, 求 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ 的值.

16. (本小题满分 14 分) 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AC$, 平面 $BB_1C_1C \perp$ 底面 $ABCD$, 点 M, F 分别是线段 AA_1, BC 的中点.

(1) 求证: $AF \perp DD_1$;

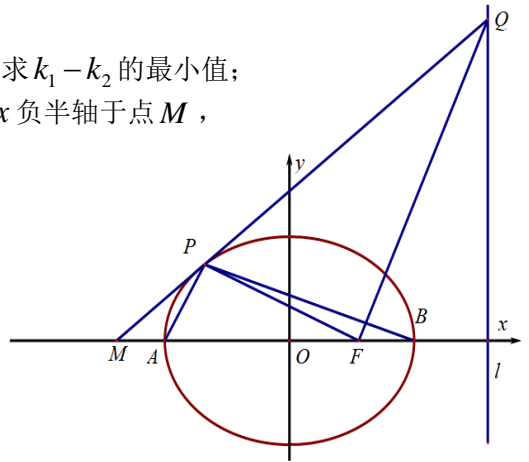
(2) 求证: $AF \parallel$ 平面 MBC_1 .



(第 16 题)

17. (本小题满分 14 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右准线方程 $l: x = 4$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 左右顶点分别为 A, B , 右焦点为 F , 点 P 在椭圆上, 且位于 x 轴上方.

- (1) 设直线 PA 的斜率为 k_1 , 直线 PB 的斜率为 k_2 , 求 $k_1 - k_2$ 的最小值;
- (2) 点 Q 在右准线 l 上, 且 $PF \perp QF$, 直线 QP 交 x 负半轴于点 M , 若 $MF = 6$, 求点 P 坐标.



(第 17 题)

18. (本小题满分 16 分) 如图, 港珠澳大桥连接珠海 (A 点)、澳门 (B 点)、香港 (C 点). 线段 AB 长度为 $10(\text{km})$, 线段 BC 长度为 $40(\text{km})$, 且 $\angle ABC = 60^\circ$. 澳门 (B 点) 与香港 (C 点) 之间有一段海底隧道, 连接人工岛 E 和人工岛 F , 海底隧道是以 O 为圆心, 半径 $R = \frac{10\sqrt{3}}{3}(\text{km})$ 的一段圆弧 EF , 从珠海点 A 到人工岛 E 所在的直线 AE 与圆 O 相切, 切点为点 E , 记 $\angle AEB = \theta, \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.

- (1) 用 θ 表示 AE 、 EF 及弧长 EF ;
- (2) 记路程 AE 、弧长 EF 及 BE 、 FC 四段长总和为 l , 当 θ 取何值时, l 取得最小值?



(第 18 题)

19. (本小题满分 16 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - \ln x - x$, $g(x) = e^x(2-x) + (2-2a)x$ (e 是自然对数的底数).

(1) 若 $a=1$, 求函数 $f(x)$ 的单调增区间;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 求实数 a 的取值范围.

20. (本小题满分 16 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$, 对于给定的正整数 k , 记 $b_n = a_n - a_{n+k}$, $c_n = a_n + a_{n+k}$ ($n \in N^*$). 若对任意的正整数 n 满足: $b_n \leq b_{n+1}$, 且 $\{c_n\}$ 是等差数列, 则称数列 $\{a_n\}$ 为 “ $H(k)$ ” 数列.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = n^2$, 证明: $\{a_n\}$ 为 $H(k)$ 数列;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为 $H(1)$ 数列, 且 $a_1 = 1, b_1 = -1, c_2 = 5$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 为 $H(2)$ 数列, 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列.