# 教室中视角“最佳”的位置问题

安徽省合肥市第四中学 230000 周赛龙 储炳南

利用所学的数学知识,从现实情景出发,发现并提出问题,分析问题,建立和求解模型,检验和完善模型,并最终解决实际问题,是高中数学建模的主要过程,也是培养学生数学建模核心素养的必要手段[1].本文,笔者将数学中的抽象知识与生活中的实际问题结合起来,采用数学建模的思想方法,对教室中视角“最佳” 的位置问题进行了分析探讨,旨在增强数学知识的趣味性和实用性,提升学生数学学习的兴趣,提高学生数学应用的意识,培养学生数学建模的核心素养.

## 1 提出问题

我们知道,在教室里坐在不同位座上,看黑板感受是不一样,这主要是由于在不同位置观看黑板时视角不同引起的. 一般情况下,当你观看一个物体时,视角越大,看得就越清晰.根据以上依据, 你能找出教室中视角“最佳” 的位置吗?

## 2 建立模型

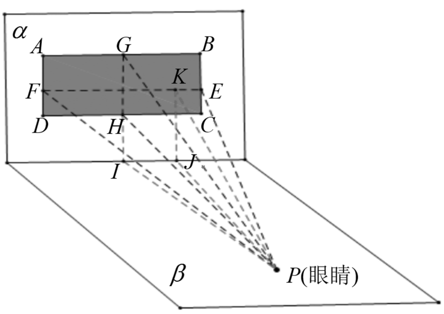


图 1

如图 1 所示, 在竖直墙面 $\alpha$ 上有一矩形黑板 $ABCD$,黑板两竖直边与墙边距离相同.其中,$|AB|=a$,$|AD|=b$,$(a>b)$. $E$、$F$ 分别为黑板两竖直边上的两点,且满足:$EF\,/\!/\,AB\,/\!/\,CD\,/\!/\,\beta$,$G$、$H$ 分别为黑板两水平边上的两点,且满足:$GH\perp\beta$,$AD\perp\beta$ ,$BC\perp\beta$.延长 $GH$ 交面 $\beta$ 于点 $I$.点 $P$(眼睛) 在水平平面 $\beta$ 内,边 $CD$ 在 $\beta$ 上方且与 $\beta$ 的距离 $|HI|$ 为定值 $c$.

实际上,当我们在点 $P$ 处看黑板时,视角会分为水平和竖直两个方向,结合观看物体时,视角越大看得越清晰的理论前提,教室中看黑板最清晰的位置,应该同时满足如下两个条件:① 水平方向上,点 $P$ 到黑板的距离 $|PJ|$ 和 $EF$ 到 $\beta$ 面的距离 $|KJ|$ 一定时,$\angle EPF$ 度数最大;② 竖直方向上,$GH$ 与黑板两竖直边的距离一定时,$\angle GPH$ 度数最大.

## 3 求解模型

### 3.1 水平方向上最大视角的求解

如图 1 所示,连接线段 $PE$、$PF$.当点 $P$ 到黑板的距离 $|PJ|$ 和 $EF$ 到 $\beta$ 面的距离 $|KJ|$ 一定时, 点 $P$ 到线段 $EF$ 的距离 $|PK|$ 也固定,记:$|PK|=h$.则问题可转化为如下模型:

如图 2、3 所示,在 $\triangle PEF$ 中,边 $EF$ 上的高为线段 $PK$,且 $|PK|=h$,$|EF|=a$ 均为定值,求 $\angle EPF$ 度数最大时点 $P$ 的位置.

**解** 设 $|EK|=x$,记 $\angle EPF=\theta$,$\angle KPE=\alpha$,$\angle KPF=\beta$.

(1) 如图 2 所示,高 $PK$ 的垂足 $K$ 在线段 $EF$ 上时,$0\leqslant x\leqslant a$,则:

$$\tan\alpha=\frac{|EK|}{|PK|}=\frac{x}{h},\tan\beta=\frac{|FK|}{|PK|}=\frac{a-x}{h}$$

所以 $\cot\theta=\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=$

$$\frac{1-\dfrac{x}{h}\cdot\dfrac{a-x}{h}}{\dfrac{x}{h}+\dfrac{a-x}{h}}=\frac{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+h^2-\dfrac{a^2}{4}}{ah}.$$

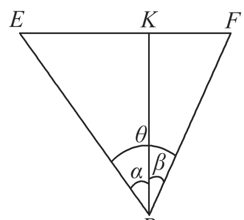


图 2

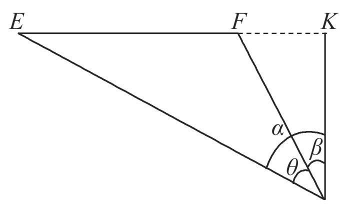


图 3

当 $x=\dfrac{a}{2}$ 时,$(\cot\theta)_{\min}=\dfrac{4h^2-a^2}{4ah}$,即 $\angle EPF=\theta$ 取最大值.此时,点 $P$ 在边 $EF$ 的垂直平分线上.

(2) 如图3 所示,高 $PK$ 的垂足 $K$ 在线段 $EF$ 延长线上时,$x>a$,则:

$$\tan\alpha=\frac{|EK|}{|PK|}=\frac{x}{h},\tan\beta=\frac{|FK|}{|PK|}=\frac{x-a}{h}.$$

所以 $\cot\theta=\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\dfrac{1+\frac{x}{h}\cdot\frac{x-a}{h}}{\frac{x}{h}-\frac{x-a}{h}}=\dfrac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+h^2-\frac{a^2}{4}}{ah}$.

所以此时,$(\cot\theta)_{\min}>\dfrac{4h^2}{4ah}>\dfrac{4h^2-a^2}{4ah}$.

综上可知:当 $x=\dfrac{a}{2}$ 时,$\cot\theta$ 取最小值;即点 $P$ 在边 $EF$ 的垂直平分线上时,即 $\angle EPF=\theta$ 取最大值.

### 3.2　竖直方向上最大视角的求解

如图 1 所示,线段 $GH$ 垂直平分黑板两水平边时,延长 $GH$ 交面 $\beta$ 与点 $I$,连接线段 $PI$、$PH$、$PG$.则问题可转化为如下模型:

如图 4 所示,在 $\mathrm{Rt}\triangle PGI$ 中,点 $H$ 为边 $GI$ 上一点,且满足 $|GH|=b$,$|HI|=c$,求:当线段 $PI$ 的长度取何值时,$\angle GPH$ 度数最大.

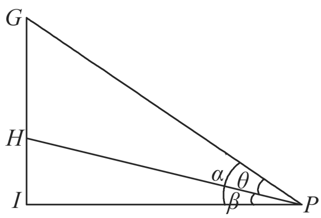


图 4

**解**　设 $|PI|=x$,记 $\angle GPH=\theta$,$\angle GPI=\alpha$,$\angle HPI=\beta$,则:

$\tan\alpha=\dfrac{|GI|}{|PI|}=\dfrac{b+c}{x}$,$\tan\beta=\dfrac{|HI|}{|PI|}=\dfrac{c}{x}$.

所以 $\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{b+c}{x}-\frac{c}{x}}{1+\frac{b+c}{x}\cdot\frac{c}{x}}=\dfrac{b}{x+\frac{(b+c)c}{x}}$.

所以当 $x=\sqrt{(b+c)c}$ 时,$\tan\theta$ 取最大值,角 $\theta$ 度数最大.即:$|PI|=\sqrt{(b+c)c}$ 时,$\angle GPH$ 最大.

综合以上水平和竖直两个方向上的最大视角的求解结果可知:教室里,黑板的正中央且距离黑板的距离为 $\sqrt{(b+c)c}$ 处的位置为教室中视角"最佳"的位置.

## 4　检验结果

以上求解结果中,水平方向上,教室中的每一排的最中间位置是看黑板的"最佳"位置与现实情况相符合,因为中间位置不仅可以保障水平视角达到最大,而且不用斜视,且不易出现黑板"反光"情况;而对于竖直方向上,教室中最中间列距离黑板 $\sqrt{(b+c)c}$ 处的位置为视角"最佳"的位置却可以有不同的阐释:一方面,此处所说的位置"最佳"仅代表在该位置处恰好同一水平方向和同一竖直方向上的视角同时达到最大,但在其他水平方向上,此位置所处的水平视角却不是最大的,因为对于教室中的最中间列而言,显然,距离黑板越近,水平视角会越大;另一方面,此处所说的视角"最佳"位置不一定

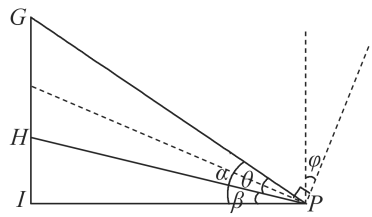


图 5

是教室中观看黑板"最舒服、最健康"的位置,如图 5 所示,当竖直视角为角 $\theta$ 时,人体需要抬头后仰或向上眼动一个 $\varphi=\dfrac{2\beta+\theta}{2}$ 角度,长时间观看黑板时易造成人体一定程度上的颈部或眼部疲劳.但考虑到一般教室的空间不大,一节课时间不长且学生课间可以适当休息,所以角度 $\varphi$ 对学生观看黑板的舒适度及身体健康的影响不会太大.但若在空间大、观看时间长的电影场中,最佳观影位置的选择就应该着重考虑角度 $\varphi$ 对观众观影体验的影响了,毕竟大多人看电影是奔着放松娱乐去的.

## 5　模型应用案例

如图 6 所示,一矩形足球场在平面 $\alpha$ 上,矩形 $ABCD$ 是一方球门所在位置,其中 $|AB|=a$,$|AD|=b$,$(a>b)$.在平面 $\alpha$ 上,除矩形 $ABCD$ 外,现将矩形足球场分为如图所示的Ⅰ、Ⅱ两个位置区域,点 $P$(射球点)在平面 $\alpha$ 内,过点 $P$ 作 $PE\perp CD$ 于点 $E$,讨论点 $P$ 的最佳射门位置.

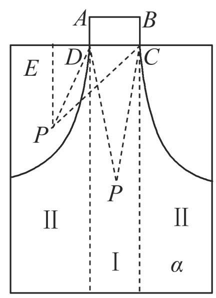


图 6

### 5.1　当 $|PE|=y$ 一定时

此种情况与原模型情形 ① 水平方向上最大视角的求解情形相同,由原模型知:点 $P$ 在边 $CD$ 的垂直平分线上时,足球进球的可射角 $\angle CPD$ 最大.即:在距离球门的距离一定时,足球场上的"最佳"射球点应该在正对球门的正中央处.

### 5.2　当 $|ED|=x$ 一定时

(1) 点 $P$ 在区域 Ⅰ 内时,此种情况显然 $|PE|$ 越小,足球进球的可射角 $\angle CPD$ 就越大.

(2) 点 $P$ 在球场左侧区域 Ⅱ 内时,此种情况与

原模型情形②竖直方向上最大视角的求解情形相同,由原模型知:当 $|PE|=\sqrt{(a+x)x}$ 时,足球进球的可射角 $\angle CPD$ 最大.

综合情形(1)、(2)可知:当球员沿着垂直球门线的方向进行射门时,若球员在区域 Ⅰ 内,则离球门越近,进球的几率就越大;若球员在球场左侧的区域 Ⅱ 内,离球门越近,进球的几率就不一定越大了,此时"最佳"射球点与线段 $ED$ 的长度 $x$ 有关,$x$ 与 $y$ 满足函数关系:$y=\sqrt{(a+x)x}$.整理得:$\dfrac{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2}{\dfrac{a^2}{4}}-\dfrac{y^2}{\dfrac{a^2}{4}}=1,(x\geqslant 0)$.即:此时"最佳"射球点恰好在一等轴双曲线上,如图6所示.(球员在球场右侧的区域 Ⅱ 内的情况与左侧相同)

**注** 以上求解结果,仅仅考虑水平方向上的射球角度(把足球始终看成是沿着地面运动的)对进球的影响,而没有考虑竖直方向上的射球角度(球飞离地面的情况)对进球的影响.

数学建模方法是指运用数学工具,将已知的数学思想、方法和知识运用于解决实际问题的过程,是完成建模问题的有效途径,更是数学建模的核心[2].希尔伯特曾说过:"只要一门科学分支能不断地提出大量问题,它就充满着生命力,而问题缺乏预示着独立发展的衰亡与中止."数学学科也是如此,数学教学中应该不断地向学生提出问题,但这些问题不应该只是抽象的、枯燥无味的数字演练,更应该是与实际生活紧密相关的现实问题,让学生感受到自己所学知识的"用武之地",经常能尝到成功的喜悦[3].这样,不仅能够让学生体会到数学知识的巨大的应用价值,还能激发学生学习数学的热情,提高学生分析问题、解决问题的能力,增强学生主动应用数学知识的意识,最终达到培养学生数学建模、数学抽象、数学运算、逻辑推理等核心素养的目的.

**参考文献**


[1] 普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.

[2] 封平华.高中数学建模教学策略[J].教学与管理,2013(08).

[3] 储炳南.客站、冰箱、进货与苹果[J].中学数学教学,1996(02).



**作者简介** 周赛龙,男,合肥市第四中学青年教师,2018年毕业于华中师范大学,已发表论文数篇.

储炳南,男,安徽省数学正高级教师,特级教师,合肥市数学学科带头人.


# 关于三角形不等式的一个基础性结论


山东省高青县第一中学 256300 董 林

山东省微山县荆集小学 277600 苏计峰


近日,笔者发现了关于三角形不等式的如下一个基础性结论:

**定理** 在 $\triangle ABC$ 中,$a,b,c$ 为其三边长,$p$ 为其半周长,$R,r$ 分别为其外接圆和内切圆半径,则有

$$p^4-2(2R^2+10Rr-r^2)p^2+(4R+r)^3r\leqslant 0. \quad ①$$

**证明** 设 $\triangle ABC$ 的面积为 $S$,若用 $\Pi$ 表示循环积,则由正弦定理及 $A+B+C=\pi$ 知

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=R(\sin A+\sin B+\sin C)=R\left(\sin A+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)$$
$$=R\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin\frac{\pi-A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)=2R\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)$$
$$=2R\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=4R\Pi\cos\frac{A}{2}.$$

由 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=rp$ 及二倍角公式、正弦定理知

$$r=\frac{S}{p}=\frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{4R\Pi\cos\frac{A}{2}}=\frac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{4R\Pi\cos\frac{A}{2}}=4R\Pi\sin\frac{A}{2}.$$