徐州一中
兴化中学 2021届两校联合第二次适应性考试

高 三 数 学

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知i为虚数单位，复数$z=\dfrac{1-3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$，则$|z|=$

A．1　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{10}$

2．集合$A=\left\{x\middle|\dfrac{1}{8}<2^x<2\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2-5x+6\geq 0\right\}$，则$A,B$间的关系是

A．$A\bigcup B=R$　　B．$B\subseteq A$　　C．$A\bigcap B=\varnothing$　　D．$A\cup B=B$

3．已知$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$，且$\alpha$为锐角，则$\cos 2\alpha=$

A．$-\frac{12}{25}$　　B．$\frac{12}{25}$　　C．$-\frac{24}{25}$　　D．$\frac{24}{25}$

4．著名物理学家李政道说："科学和艺术是不可分割的"。音乐中使用的乐音在高度上不是任意定的，它们是按照严格的数学方法确定的.我国明代的数学家、音乐理论家朱载填创立了十二平均律是第一个利用数学使音律公式化的人.十二平均律的生律法是精确规定八度的比例，把八度分成13个半音，使相邻两个半音之间的频率比是常数，如下表所示，其中$a_1,a_2,\ldots,a_{13}$表示这些半音的频率，它们满足$\log_2\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)^{12}=1\left(i=1,2,\ldots,12\right)$.若某一半音与$D^{\#}$的频率之比为$\sqrt[3]{2}$，则该半音为

频率	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
半音	C	$C^{\#}$	D	$D^{\#}$	E	F	$F^{\#}$	G	$G^{\#}$	A	$A^{\#}$	B	C（八度）

A．$F^{\#}$　　B．G　　C．$G^{\#}$　　D．A

5．已知双曲线C：$\frac{x^2}{3}-y^2=1$，O为坐标原点，F为C的右焦点，过F的直线与C的两条渐近线的交点分别为M，N．若△OMN为直角三角形，则$|MN|$等于

A．$\frac{3}{2}$　　B．3　　C．$2\sqrt{3}$　　D．4

6．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，若$\sqrt{2}\vec{a}+\vec{b}$与$x\vec{a}+\vec{b}$的夹角为45°，则实数$x=$

A．$\sqrt{2}-1$　　B．$\sqrt{2}+1$　　C．$3-2\sqrt{2}$　　D．$-3-2\sqrt{2}$

7．2019年10月1日，为了庆祝中华人民共和国成立70周年，小明、小红、小金三人以国庆为主题各自独立完成一幅十字绣赠送给当地的村委会，这三幅十字绣分别命名为"鸿福齐天"、"国富民强"、"兴国之路"，为了弄清"国富民强"这一作品是谁制作的，村支书对三人进行了问话，得到回复如下：

小明说："鸿福齐天"是我制作的；

小红说："国富民强"不是小明制作的，就是我制作的；

小金说："兴国之路"不是我制作的.

若三人的说法有且仅有一人是正确的，则"鸿福齐天"的制作者是

A．小明　　B．小红　　C．小金　　D．小金或小明

8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, & x\leqslant 0,\\ -x^2-3x, & x>0,\end{cases}$ 若不等式 $|f(x)|\geqslant mx-2$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为

A．$[3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$　　B．$[0, 3-2\sqrt{2}]$

C．$(3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$　　D．$[0, 3+2\sqrt{2}]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9．设正实数 a，b 满足 $a+b=1$，则

A．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 有最小值 4　　B．$\sqrt{ab}$ 有最小值 $\frac{1}{2}$

C．$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 有最大值 1　　D．a^2+b^2 有最小值 $\frac{1}{2}$

10．古希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名，他发现：平面内到两个定点 A、B 的距离之比为定值 λ（$\lambda\neq 1$）的点所形成的图形是圆．后来，人们将这个圆以他的名字命名，称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆．已知在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-2,0)$、$B(4,0)$，点 P 满足 $\frac{PA}{PB}=\frac{1}{2}$，设点 P 所构成的曲线为 C，下列结论正确的是

A．C 的方程为 $(x+4)^2+y^2=16$

B．在 C 上存在点 D，使得 D 到点 $(1,1)$ 的距离为 3

C．在 C 上存在点 M，使得 $|MO|=2|MA|$

D．在 C 上存在点 N，使得 $|NO|^2+|NA|^2=4$

11．已知甲罐中有四个相同的小球，标号为 1，2，3，4；乙罐中有五个相同的小球，标号为 1，2，3，5，6，现从甲罐、乙罐中分别随机抽取 1 个小球，记事件 $A=$“抽取的两个小球标号之和大于 5”，事件 $B=$“抽取的两个小球标号之积大于 8”，则

A．事件 A 发生的概率为 $\frac{1}{2}$

B．事件 $A\cup B$ 发生的概率为 $\frac{11}{20}$

C．事件 $A\cap B$ 发生的概率为 $\frac{2}{5}$

D．从甲罐中抽到标号为 2 的小球的概率为 $\frac{1}{5}$

12．设函数 $f\left(x\right)=x\ln x$，$g\left(x\right)=\dfrac{f'\left(x\right)}{x}$，给定下列命题，正确的是

A．不等式 $g\left(x\right)>0$ 的解集为 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$；

B．函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,e\right)$ 单调递增，在 $\left(e,+\infty\right)$ 单调递减；

C．若 $x_1>x_2>0$ 时，总有 $\dfrac{m}{2}\left(x_1^2-x_2^2\right)>f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$ 恒成立，则 $m\geq 1$；

D．若函数 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-ax^2$ 有两个极值点，则实数 $a\in\left(0,1\right)$.

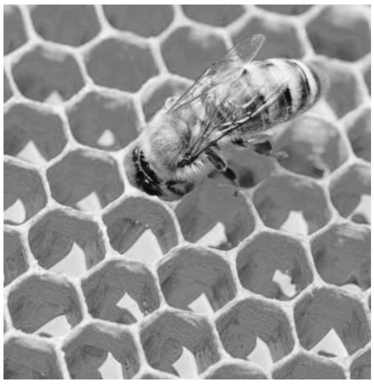
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

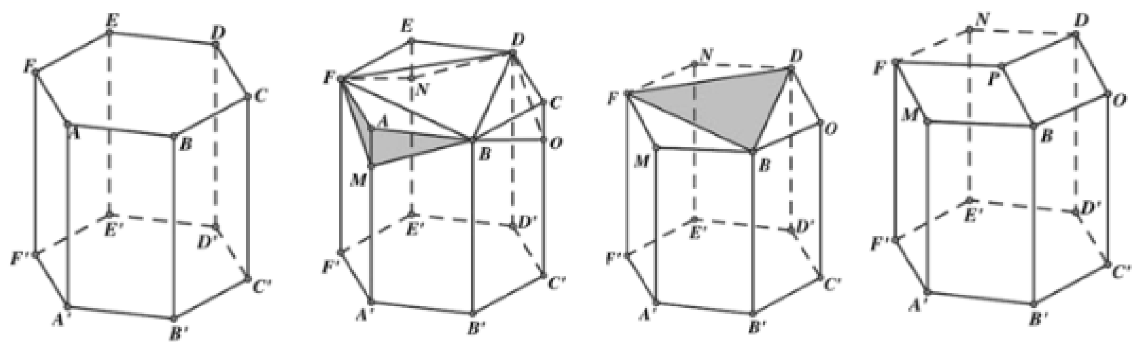
13．命题“$\forall x\in\left[0,+\infty\right)$，$x^3+x\geq 0$”的否定是______.

14．$\left(2x-1\right)^5+\left(x+2\right)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_0+a_2+a_4=$________.

15．已知 F_1、F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 F_2 关于直线 $y=x$ 对称的点 Q 在椭圆上，则椭圆的离心率为________；若过 F_1 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线与椭圆相交于 AB 两点，且 $\overrightarrow{AF_1}=3\overrightarrow{F_1B}$，则 $k=$________.（本题第一空 2 分，第二空 3 分。）

16．蜂巢是由工蜂分泌蜂蜡建成的从正面看，蜂巢口是由许多正六边形的中空柱状体连接而成，中空柱状体的底部是由三个全等的菱形面构成，菱形的一个角度是 $109°28'$，这样的设计含有深刻的数学原理、我国著名数学家华罗庚曾专门研究蜂巢的结构著有《谈谈与蜂房结构有关的数学问题》．用数学的眼光去看蜂巢的结构，如图，在六棱柱 $ABCDEF-A'B'C'D'E'$ 的三个顶点 A，C，E 处分别用平面 BFM，平面 BDO，平面 DFN 截掉三个相等的三棱锥 $M-ABF$，$O-BCD$，$N-DEF$，平面 BFM，平面 BDO，平面 DFN 交于点 P，就形成了蜂巢的结构.





如图，设平面 $PBOD$ 与正六边形底面所成的二面角的大小为 θ，则 $\cos\theta=$________.（用含 $\tan 54^\circ 44'$ 的代数式表示）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（本小题满分 10 分）

在① $3a_2+b_2+b_4=0$，② $a_4=b_4$，③ $S_3=-27$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的 λ 存在，求实数 λ 的取值范围；若问题中的 λ 不存在，请说明理由.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，__________，$a_5=b_1$，$4T_n=3b_n-1$（$n\in\mathbf{N}^*$），是否存在实数 λ，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $\lambda\le S_n$？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18．（本小题满分 12 分）

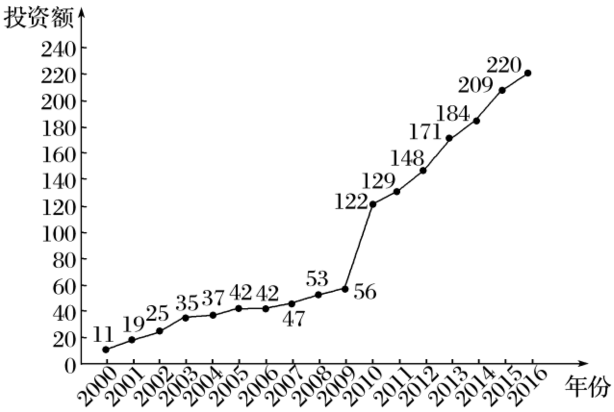
已知函数 $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x(x\in\mathbf{R})$.

（1）求 $f(x)$ 的对称轴和单调区间；

（2）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边为 a，b，c，若 $f(A)=2$，$c=5$，$\cos B=\dfrac{1}{7}$，求 $\triangle ABC$ 中线 AD 的长.

19．（本小题满分 12 分）

下图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y（单位：亿元）的折线图.



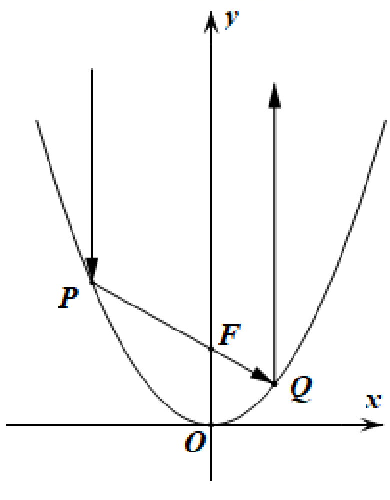
为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额，建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型.根据 2000 年至 2016 年的数据(时间变量 t 的值依次为 1，2，…，17)建立模型①：$\hat{y}=-30.4+13.5t$；根据 2010 年至 2016 年的数据(时间变量 t 的值依次为 1，2，…，7)建立模型②：$\hat{y}=99+17.5t$.

（1）分别利用这两个模型，求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值；

（2）你认为用哪个模型得到的预测值更可靠？并说明理由.

20．（本小题满分 12 分）

光学是当今科技的前沿和最活跃的领域之一，抛物线有如下光学性质：由其焦点射出的光线经抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出，今有抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$，一平行于 y 轴的光线从上方射向抛物线上的点 P，经抛物线 2 次反射后，又沿平行于 y 轴方向射出，若两平行光线间的最小距



离为 8.

（1）求抛物线C的方程；

（2）若直线$l: y=x+m$与抛物线C交于A，B两点，以点A为顶点作$\triangle ABN$，使$\triangle ABN$的外接圆圆心T的坐标为$\left(3,\dfrac{49}{8}\right)$，求弦$AB$的长度.

21．（本小题满分 12 分）

已知函数$f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2+1$.

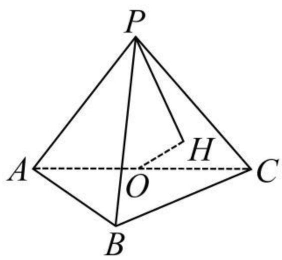
（1）讨论函数$f\left(x\right)$的单调性；

（2）当$a=1$时，设函数$f\left(x\right)$的两个零点为x_1，x_2，试证明：$x_1+x_2>2$.

22．（本小题满分 12 分）

在①OH∥平面PAB，②平面PAB⊥平面OHC，③OH⊥PC这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解决该问题.

问题：如图，在三棱锥$P-ABC$中，平面PAC⊥平面ABC，△ABC是以AC为斜边的等腰直角三角形，AC＝16，PA＝PC＝10，O为AC中点，H为△PBC内的动点（含边界）.



（1）求点O到平面PBC的距离；

（2）若__________，求直线PH与平面ABC所成角的正弦值的取值范围.

注：若选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

徐州一中
兴化中学 2021 届两校联合第二次适应性考试

高三数学试题参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．A　2．D　3．C　4．B　5．B　6．C　7．B　8．D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9．AD　10．ABD　11．BC　12．AC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$\exists x_0 \in [0,+\infty).x_0^{\,3}+x_0<0$　14．-80

15．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　1　16．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\tan 54°44'$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（本小题满分 10 分）

设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

当$n=1$时，$4T_1=3b_1-1$，

得$b_1=-1$，

从而$a_5=-1$，

当$n\geq 2$时，$4b_n=4T_n-4T_{n-1}=(3b_n-1)-(3b_{n-1}-1)=3b_n-3b_{n-1}$，

得$b_n=-3b_{n-1}$，

所以数列$\{b_n\}$是首项为-1，公比为-3的等比数列，

所以$b_n=-(-3)^{n-1}$，

由对任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有$\lambda\leq S_n$，

可知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和S_n存在最小值，

假设 $n=k$ 时，S_n 取最小值，所以 $\begin{cases}S_{k-1}\ge S_k\\S_k\le S_{k+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_k\le 0\\a_{k+1}\ge 0\end{cases}$；

（1）若补充条件是① $3a_2+b_2+b_4=0$，

因为 $b_2=3$，$b_4=27$，

从而 $a_2=-\frac{1}{3}\left(b_2+b_4\right)=-10$，

由 $a_5=a_2+3d$ 得 $d=3$，

所以 $a_n=a_1+\left(n-1\right)d=a_2+\left(n-2\right)d=-10+3\left(n-2\right)=3n-16$，

由等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和 S_n 存在最小值，

又 $k\in\mathbf{N}^*$，所以 $k=5$，所以 $\lambda\le S_5=-35$，故实数 λ 的取值范围为 $\left(-\infty,-35\right]$.

（2）若补充条件是② $a_4=b_4$，

由 $b_4=27$，即 $a_4=27$，又 $a_5=b_1=-1$，

所以 $d=a_5-a_4=-1-27=-28$；

所以 $a_n=a_1+\left(n-1\right)d=a_5+\left(n-5\right)d=-1-28\left(n-5\right)=-28n+139$，

由等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和 S_n 存在最小值，

则 $\begin{cases}-28k+139\le 0\\-28\left(k+1\right)+139\ge 0\end{cases}$，得 $\begin{cases}k\ge\frac{139}{28}\\k\le\frac{111}{28}\end{cases}$，

所以 $k\in\varnothing$，

所以不存在 k，使得 S_n 取最小值，

故实数 λ 不存在.

（3）若补充条件是③ $S_3=-27$，

由 $S_3=a_1+a_2+a_3=3a_2=-27$，

得 $a_2=-9$，

又 $a_5=b_1=-1=a_2+3d$，

所以 $d=\dfrac{a_5-a_2}{3}=\dfrac{8}{3}$，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=a_2+(n-2)d=-9+\dfrac{8}{3}(n-2)=\dfrac{8}{3}n-\dfrac{43}{3}$，

由等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 存在最小值，

则 $\begin{cases}\dfrac{8}{3}k-\dfrac{43}{3}\le 0\\ \dfrac{8}{3}(k+1)-\dfrac{43}{3}\ge 0\end{cases}$，

得 $\dfrac{35}{8}\le k\le\dfrac{43}{8}$，

又 $k\in\mathbf{N}^*$，所以 $k=5$，

所以存在 $k=5$，使得 S_n 取最小值，

所以 $\lambda\le S_5=-\dfrac{95}{3}$，

故实数 λ 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{95}{3}\right]$.

18．（本小题满分 12 分）

（1） $f(x)=-\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

令 $2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，解得 $x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}$， $k\in Z$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}$， $k\in Z$，

令 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，解得 $\dfrac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,k\in Z$，

令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，解得 $-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z$，

$\therefore f(x)$ 的递减区间为：$\left[\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\right]$， $k\in Z$；递增区间为：$\left[-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right]$， $k\in Z$.

（2）由（1）知 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中 $f(A)=2$，$\therefore \sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)=1, -\dfrac{\pi}{6}<2A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{6}$，

$\therefore 2A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$，又 $\cos B=\dfrac{1}{7}$，$\therefore \sin B=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$，得 $\dfrac{5}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}=\dfrac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，$\therefore a=7$，$\therefore BD=\dfrac{7}{2}$，

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\times BD\times\cos B=5^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2-2\times5\times\frac{7}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{129}{4},$$

$\therefore AD=\dfrac{\sqrt{129}}{2}$.

19．（本小题满分 12 分）

(1)利用模型①，可得该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值为 $\hat{y}=-30.4+13.5\times19=226.1$(亿元).

利用模型②，可得该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值为 $\hat{y}=99+17.5\times9=256.5$(亿元).

(2)利用模型②得到的预测值更可靠.

理由如下：

(ⅰ)从折线图可以看出，2000 年至 2016 年的数据对应的点没有随机散布在直线 $y=-30.4+13.5t$ 上下，这说明利用 2000 年至 2016 年的数据建立的线性模型①不能很好地描述环境基础设施投资额的变化趋势.2010 年相对 2009 年的环境基础设施投资额有明显增加，2010 年至 2016 年的数据对应的点位于一条直线的附近，这说明从 2010 年开始环境基础设施投资额的变化规律呈线性增长趋势，利用 2010 年至 2016 年的数据建立的线性模型 $\hat{y}=99+17.5t$ 可以较好地描述 2010 年以后的环境基础设施投资额的变化趋势，因此利用模型②得到的预测值更可靠.

(ⅱ)从计算结果看，相对于 2016 年的环境基础设施投资额 220 亿元，由模型①得到的预测值 226.1 亿元的增幅明显偏低，而利用模型②得到的预测值的增幅比较合理，说明利用模型②得到的预测值更可靠.

20．（本小题满分 12 分）

（1）设 $P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)$，

$\because F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，

设直线 PQ 方程为：$y=kx+\dfrac{p}{2}$，$k\in\mathbf{R}$，

由 $\begin{cases}x^2=2py\\ y=kx+\dfrac{p}{2}\end{cases}$，得 $x^2-2pkx-p^2=0$，

$\therefore x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=-p^2$，

则两平行光线距离 $d=\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{4p^2k^2+4p^2}\geq 2p$，

$\therefore 2p=8$，故抛物线方程为 $x^2=8y$.

（2）设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，A，B 中点 $M\left(x_0,y_0\right)$

由 $\begin{cases}x^2=8y\\ y=x+m\end{cases}$，得 $x^2-8x-8m=0$，$\Delta>0\Rightarrow m>-2$，

$\therefore x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=4$，$y_0=4+m$，

$\because MT\perp AB$，

$\therefore k_{MT}\cdot k_{AB}=-1$，即 $\dfrac{m+4-\dfrac{49}{8}}{4-3}\cdot 1=-1$，解得 $m=\dfrac{9}{8}$，

$\therefore x^2-8x-9=0\Rightarrow x_1=-1$，$x_2=9$，

$\therefore \left|AB\right|=\sqrt{1+1^2}\left|x_1-x_2\right|=10\sqrt{2}$.

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）易得函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$.

对函数 $f\left(x\right)$ 求导得：$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-ax$.

当 $a\leq 0$ 时，$f'\left(x\right)>0$ 恒成立，即可知 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，当 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，当 $x\in\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$，

故 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

（2）当 $a=1$ 时， $f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+1$， $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-x=\dfrac{1-x^2}{x}$，

此时 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减.

$f\left(x\right)_{极大值}=f\left(1\right)=\dfrac{1}{2}>0$，又 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)<0$， $f\left(e\right)<0$，

不妨设 $x_1<x_2$，则有 $0<x_1<1<x_2$，

令 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(2-x\right)$， $x\in\left(0,1\right)$，

$F'\left(x\right)=f'\left(x\right)+f'\left(2-x\right)=\dfrac{1-x^2}{x}+\dfrac{1-\left(2-x\right)^2}{2-x}=\dfrac{2\left(1-x\right)^2}{x\left(2-x\right)}$.

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时， $F'\left(x\right)>0$， $F\left(x\right)$ 单调递增，

$\because x_1\in\left(0,1\right)$， $\therefore F\left(x_1\right)=f\left(x_1\right)-f\left(2-x_1\right)<F\left(1\right)=0$，

$\therefore f\left(x_1\right)<f\left(2-x_1\right)$，

又 $\because f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$， $\therefore f\left(x_2\right)<f\left(2-x_1\right)$，

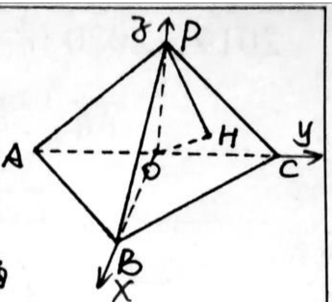
$\because x_2>1$， $2-x_1>1$， $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减，

$\therefore x_2>2-x_1$，即 $x_1+x_2>2$.

22．（本小题满分 12 分）

（1）点 O 到平面 PBC 的距离为 $\dfrac{12\sqrt{34}}{17}$

22.（12分）



解：(1)在三棱锥 $P-ABC$ 中，连接 OB，OP，因为 $\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形，$PA=PC$，O 为 AC 中点，

所以 $OP\perp OC$ $OB\perp OC$

又平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=OC$，$OP\subset$ 平面 PAC $\therefore OP\perp$ 平面 ABC

又 $OB\subset$ 平面 ABC $\therefore OP\perp OB$ $\therefore OB.OC.OP$ 两两垂直.

$\therefore V_{O-PBC}=V_{P-OBC}=\frac{1}{3}\times PO\times S_{\triangle OBC}=\frac{1}{3}\times\sqrt{10^2-8^2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{16}{2}\right)^2$
$=64$

又 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times BC\times\sqrt{PB^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{2}\times\sqrt{10^2-(4\sqrt{2})^2}=8\sqrt{34}$

$\therefore d=\frac{V_{O-PBC}}{\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PBC}}=\frac{64}{\frac{1}{3}\times 8\sqrt{34}}=\frac{12\sqrt{34}}{17}$

$\therefore$ 点 O 到平面 PBC 的距离为 $\frac{12\sqrt{34}}{17}$.

（2）PH 与平面 ABC 所成角的正弦值的取值范围为 $\left[\frac{3}{5},\frac{3\sqrt{17}}{17}\right]$.

以选条件①为例（亦可使用综合法、综合与向量混用法）

(2) 在三棱锥 $P-ABC$ 中，以 O 为坐标原点，$\{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OP}\}$ 为正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.

则 $O(0,0,0)$，$P(0,0,6)$，$A(0,-8,0)$，$C(0,8,0)$

$B(8,0,0)$，设 $H(x,y,z)$

则 $\overrightarrow{OH}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{PH}=(x,y,z-6)$，$\overrightarrow{PA}=(0,-8,-6)$

$\overrightarrow{PB}=(8,0,-6)$，$\overrightarrow{PC}=(0,8,-6)$

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则

$\begin{cases}\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \vec{n_1}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-8y_1-6z_1=0\\ 8x_1-6z_1=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=-y_1\\ -4y_1=3z_1\end{cases}$ 不妨令 $y_1=-3$

则 $\vec{n_1}=(3,-3,4)$

同理可求得平面 PBC 的法向量 $\vec{n_2}=(3,3,4)$

(选条件①) 因为 $OH\parallel$ 平面 PAB，$PH\subset$ 平面 PBC

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{OH}\cdot\vec{n_1}=0\\ \overrightarrow{PH}\cdot\vec{n_2}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3x-3y+4z=0\\ 3x+3y+4z-24=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}z=3-\frac{3}{4}x\\ y=4\end{cases}$

$\therefore H(x,4,3-\frac{3}{4}x)$

又 $\begin{cases}0\le x\le 8\\ 0\le 3-\frac{3}{4}x\le 6\end{cases}$ $\therefore 0\le x\le 4$ $\therefore \overrightarrow{PH}=(x,4,-3-\frac{3}{4}x)$

又 $OP\perp$ 平面 ABC $\therefore \vec{n_3}=(0,0,1)$ 是平面 ABC 的一个法向量

设直线 PH 与平面 ABC 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=|\cos\langle\vec{n_3},\overrightarrow{PH}\rangle|=\frac{|3+\frac{3}{4}x|}{\sqrt{x^2+16+(3+\frac{3}{4}x)^2}}=\frac{3|1+\frac{x}{4}|}{5\sqrt{(\frac{x}{4}+1)^2-\frac{32}{25}(\frac{x}{4}+1)+\frac{32}{50}}}$$

令 $t=\frac{x}{4}+1$，$t\in[1,2]$，$\frac{1}{t}\in[\frac{1}{2},1]$

$$\therefore\sin\theta=\frac{3t}{5\sqrt{t^2-\frac{32}{25}t+\frac{32}{25}}}=\frac{3}{5\sqrt{\frac{32}{25t^2}-\frac{32}{25t}+1}}$$

令 $f(t)=\frac{32}{25t^2}-\frac{32}{25t}+1$，$\frac{1}{t_0}=\frac{1}{2}$ $\therefore f(t)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上单调递增

$\therefore f(t)\in[\frac{17}{25},1]$ $\therefore \frac{1}{f(t)}\in[1,\frac{25}{17}]$ $\therefore \sin\theta\in[\frac{3}{5},\frac{3\sqrt{17}}{17}]$

$\therefore$ 直线 PH 与平面 ABC 所成角的正弦值的取值范围为 $[\frac{3}{5},\frac{3\sqrt{17}}{17}]$

选条件②、条件③结果相同.