江苏省仪征中学2019届高三上学期数学(理)周末限时训练2（2019.9.15）

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、复数、直线与圆

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共70分.

1. 求值：$\sin 870^{\circ}=$____▲____.

2.“$m=-1$”是“直线 $mx+(2m-1)y+1=0$ 和直线 $3x+my+3=0$ 垂直”的___▲___条件.

3. 已知复数 $z=1+i$ （i 为虚数单位），则 $z\cdot\bar{z}=$____▲____.

4. 已知角 α 的终边经过点 $P(-2,4)$，则 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值等于____▲____.

5. 将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变)，

再将图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，所得函数图象对应的解析式为 $y=$____▲____.

6. 函数 $f\left(x\right)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上的零点个数为____▲____.

7. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\sqrt{3}\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，

且满足 $f(-x)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 的单调增区间为____▲____.

8. 过点 $P(1,2)$ 作一直线 l，使直线 l 与点 $M(2,3)$ 和点 $N(4,-5)$ 的距离相等，

则直线 l 的方程为____▲____.

9. 已知过定点 $P(2,0)$的直线 l 与曲线 $y=\sqrt{2-x^2}$相交于 A，B 两点，O 为坐标原点，

当△AOB 的面积取到最大值时，直线 l 的倾斜角为___▲_____.

10.已知直线l_1：$A_1x+B_1y=1$和l_2：$A_2x+B_2y=1$相交于点$P(2,3)$，

则过点$P_1(A_1,B_1)$、$P_2(A_2,B_2)$的直线方程为____▲____.

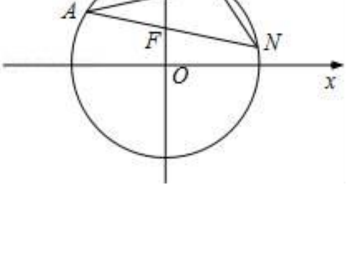
11. 已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x$，$g\left(x\right)=-x^2+ax-3$，

对一切 $x\in\left(0,+\infty\right)$，$2f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$恒成立，则实数 a 的取值范围为____▲____.

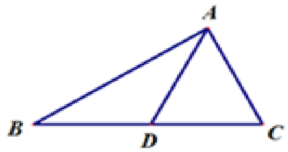
12. 如图，在圆 O：$x^2+y^2=4$ 上取一点 A（$-\sqrt{3}$，1），E、F 为 y 轴上的两点，

且 $AE=AF$，延长 AE，AF 分别与圆交于点 MN,

则直线 MN 的斜率为____▲____.



13、如图，在 ΔABC 中， $\angle BAD=30^{\circ}$， $\angle CAD=45^{\circ}$，
$AB=3, AC=2$，则 $\frac{BD}{DC}=$____▲____.



第 13 题

14、已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-2x-a$， $g\left(x\right)=x^{2}-2x+2,\left(x\in\left[0,2\right]\right)$，函数 $g\left(x\right)$ 的值域为 A，
若存在 $x_{0}\in A$，使得 $f\left(x_{0}\right)=x_{0}$ 有解，则实数 a 的取值范围是____▲____.

二、解答题：本大题共 6 小题，共 90 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分 14 分）

已知 $\alpha\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$， $\beta\in\left(\frac{\pi}{2}，\pi\right)$， $\cos\beta=-\frac{1}{3}$， $\sin\left(\alpha+\beta\right)=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

（1）求 $\tan 2\beta$ 的值；　　（2）求 α 的值.

16、（本大题满分 14 分）

过点 P(2,1)的直线 l 与 x 轴，y 轴正半轴分别交于 A，B 两点.

(1)当 OA·OB 最小时，求直线 l 的方程；

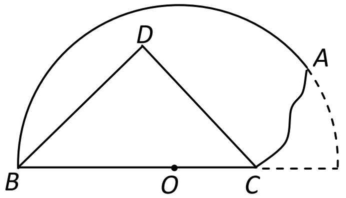
(2)当 2OA＋OB 最小时，求直线 l 的方程.

17、（本大题满分 14 分）

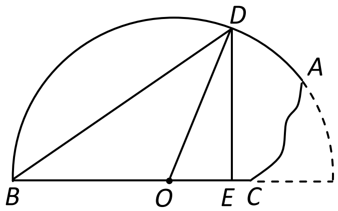
已知△ABC 的顶点 A(5,1)，AB 边上的中线 CM 所在直线方程为 2x－y－5＝0，AC 边上的高 BH 所在直线方程为 x－2y－5＝0，求直线 BC 的方程.

18、（本大题满分 16 分）

已知一块半径为 r 的残缺的半圆形材料 ABC，O 为半圆的圆心，$OC=\frac{1}{2}r$，残缺部分位于过点 C 的竖直线的右侧．现要在这块材料上截出一个直角三角形，有两种设计方案：如图甲，以 BC 为斜边；如图乙，直角顶点 E 在线段 OC 上，且另一个顶点 D 在 AB 上．要使截出的直角三角形的面积最大，应该选择哪一种方案？请说明理由，并求出截得直角三角形面积的最大值.



（第 18 题甲图）



（第 18 题乙图）

19. （本小题满分 16 分）

设函数 $f\left(x\right)=a\ln x+\frac{1}{x}-1(a\in R)$.

（1）当 $a=2$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 在点 $\left(1，f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（3）当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，求证：对任意 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，都有 $\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+a}<\mathrm{e}$.

20. （本小题满分 16 分）

已知函数 $f\left(x\right)=x^2-1$， $g\left(x\right)=a\left|x-1\right|$.

（1）若 $\left|f\left(x\right)\right|=g\left(x\right)$ 有两个不同的解，求 a 的值；

（2）若当 $x\in R$ 时，不等式 $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（3）求 $h\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|+g\left(x\right)$ 在 $\left[-2,2\right]$ 上的最大值.

高三上学期数学(理)周末限时训练 2 答案

1. $\frac{1}{2}$　　2．充分不必要　　3．2　　4. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　5. $y=\sin(2x-\frac{2}{3}\pi)$　　6. 3

7. $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi\right](k\in Z)$　　8. $4x+y-6=0$或$3x+2y-7=0$

9．150°　　10. $2x+3y-1=0$　　11. $(-\infty,4]$　　12. $-\sqrt{3}$

13、$\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　14、$\left[3-3\ln 3,e^{2}-6\right]$

15.解：（1）$\because \beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\frac{1}{3}$，得$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^{2}\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=-2\sqrt{2}$，　　…………4 分

则$\tan2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^{2}\beta}=\frac{2(-2\sqrt{2})}{1-(-2\sqrt{2})^{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$　　…………7 分

（2）由$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore \alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 又$\because \sin(\alpha+\beta)=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$，

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^{2}(\alpha+\beta)}=-\sqrt{1-\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right)^{2}}=-\frac{4+\sqrt{2}}{6}$　　……………9 分

由$\alpha=\alpha+\beta-\beta$得：$\cos\alpha=\cos(\alpha+\beta-\beta)=\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$

$=\left(-\frac{4+\sqrt{2}}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\because \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　$\therefore \alpha=\frac{\pi}{4}$.　　……………15 分

16. 解：设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)(k<0)$，

则 l 与 x 轴，y 轴正半轴分别交于 $A\left(2-\frac{1}{k},0\right)$，$B(0,1-2k)$两点.

(1)$OA\cdot OB=\left(2-\frac{1}{k}\right)\cdot(1-2k)=4+(-4k)+\left(-\frac{1}{k}\right)\geq4+2\sqrt{-4k\cdot\left(-\frac{1}{k}\right)}=8$，

当且仅当$-4k=-\frac{1}{k}$，即$k=-\frac{1}{2}$时取得最小值 8.

故当 $OA\cdot OB$ 最小时，所求直线 l 的方程为$y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$，即 $x+2y-4=0$.

(2)$2OA+OB=2\left(2-\frac{1}{k}\right)+(1-2k)=5+\left(-\frac{2}{k}\right)+(-2k)\geq5+2\sqrt{\left(-\frac{2}{k}\right)\cdot -2k}=9$，

当且仅当$-\frac{2}{k}=-2k$，即 $k=-1$ 时取得最小值 9.

故当 $2OA+OB$ 最小时，所求直线 l 的方程为 $y-1=-(x-2)$，即 $x+y-3=0$.

17.解：依题意知：$k_{AC}=-2$，A(5,1)，

所以 lAC 的方程为 2x＋y－11＝0，
联立 2x＋y－11＝0，2x－y－5＝0，得 C(4,3).
设 B(x0，y0)，则 AB 的中点 Mx0＋52，y0＋12，
代入 2x－y－5＝0，得 2x0－y0－1＝0，
联立 2x0－y0－1＝0，x0－2y0－5＝0，得 B(－1，－3)，所以 kBC＝65，
所以直线 BC 的方程为 y－3＝65(x－4)，
即 6x－5y－9＝0.

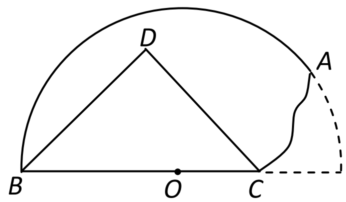
18.解：如图甲，设$\angle DBC=\alpha$，

则$BD=\dfrac{3r}{2}\cos\alpha$，$DC=\dfrac{3r}{2}\sin\alpha$，　　　　……………………………………………………2 分

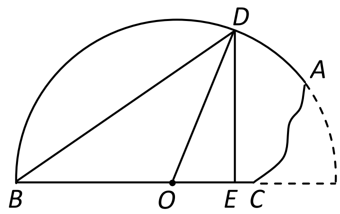
所以$S_{\triangle BDC}=\dfrac{9}{16}r^2\sin 2\alpha\ \leqslant\dfrac{9}{16}r^2$，

当且仅当$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$时取等号，　　　　　　……………………6 分

此时点D到BC的距离为$\dfrac{3}{4}r$，可以保证点D在半圆形材料ABC内部，因此按照图甲方案得到直角三角形的最大面积为$\dfrac{9}{16}r^2$.　　………………………………………………………………7 分



（第 18 题甲图）



（第 18 题乙图）

如图乙，设$\angle EOD=\theta$，则$OE=r\cos\theta$，$DE=r\sin\theta$，

所以$S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}r^2(1+\cos\theta)\sin\theta$，$\theta\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}]$.　　　……………………………………………10 分

设$f(\theta)=\dfrac{1}{2}r^2(1+\cos\theta)\sin\theta$，则$f'(\theta)=\dfrac{1}{2}r^2(1+\cos\theta)(2\cos\theta-1)$，

当$\theta\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}]$时，$f'(\theta)\leqslant 0$，所以$\theta=\dfrac{\pi}{3}$时，即点$E$与点$C$重合时，

$\triangle BDE$的面积最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}r^2$.　……………………………………………………………………13 分

因为$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}r^2>\dfrac{9}{16}r^2$，

所以选择图乙的方案，截得的直角三角形面积最大，最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}r^2$.　…………15 分

（如果设边做同样给分）

19.解：（1）当$a=2$时，$f\left(x\right)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-1$，$f\left(1\right)=2\ln 1+\dfrac{1}{1}-1=0$，

$f'\left(x\right)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$，$f'\left(1\right)=\dfrac{2}{1}-\dfrac{1}{1^2}=1$，

所以函数 $f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y-0=1\times(x-1)$，

即 $x-y-1=0$． ……………………………4 分

（2） $f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}-1$，定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax-1}{x^2}$．

① 当 $a\leqslant 0$ 时， $f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

② 当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$．

x	$\left(0,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增． …………9 分

（3）当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，由（2）可知，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，

显然， $\frac{1}{a}>2$，故 $(1,2)\subseteq\left(0,\frac{1}{a}\right)$，所以函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，

对任意 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，都有 $0<\frac{a}{x}<1$，所以 $1<1+\frac{a}{x}<2$．

所以 $f\left(1+\frac{a}{x}\right)<f(1)$，即 $a\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)+\frac{1}{1+\frac{a}{x}}-1<0$，

所以 $a\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)<\frac{a}{x+a}$，即 $\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)<\frac{1}{x+a}$，所以 $(x+a)\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)<1$，即 $\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+a}<1$，

所以 $\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+a}<\mathrm{e}$． ………………………………16 分

20.解：(1) 方程 $|f(x)|=g(x)$，即 $|x^2-1|=a|x-1|$，变形得 $|x-1|(|x+1|-a)=0$，

显然， $x=1$ 已是该方程的根，从而欲原方程有两个不同的解，即要求方程 $|x+1|=a$ “有且仅有一个不等于1的解”或“有两解，一解为1，另一解不等于1”， --------3 分

结合图形，得 $a=0$ 或 $a=2$.-----------5 分

(2) 不等式 $f(x)\geq g(x)$ 对 $x\in R$ 恒成立，即 $x^2-1\geq a|x-1|$ (*)对 $x\in R$ 恒成立，

① 当 $x=1$ 时，(*)显然成立，此时 $a\in R$； --------6 分

② 当 $x\neq 1$ 时，(*)可变形为 $a\leq\frac{x^2-1}{|x-1|}$，令 $\varphi(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}=\begin{cases}x+1, & x>1\\ -(x+1), & x<1\end{cases}$，

因为当 $x>1$ 时， $\varphi(x)>2$；而当 $x<1$ 时， $\varphi(x)>-2$.

所以 $g(x)>-2$，故此时 $a\leq -2$.----------9 分

综合①②，得所求 a 的取值范围是 $a\leq -2$.----------10 分

(3) 因为 $h(x)=|f(x)|+g(x)=|x^2-1|+a|x-1|=\begin{cases} x^2+ax-a-1 & x\geq 1 \\ -x^2-ax+a+1 & -1\leq x<1 \\ x^2-ax+a-1 & x<-1 \end{cases}$.

① 当$\frac{a}{2}>1$，即 $a>2$ 时，结合图形可知 $h(x)$在$[-2,1]$上递减，在$[1,2]$上递增，

且 $h(-2)=3a+3$，$h(2)=a+3$，经比较，此时 $h(x)$在$[-2,2]$上的最大值为 $3a+3$.-----11 分

② 当 $0\leq\frac{a}{2}\leq 1$，即 $0\leq a\leq 2$ 时，结合图形可知 $h(x)$在$[-2，-1]$，$[-\frac{a}{2}，1]$上递减，

在$[-1，-\frac{a}{2}]$，$[1,2]$上递增，且 $h(-2)=3a+3$，$h(2)=a+3$，$h(-\frac{a}{2})=\frac{a^2}{4}+a+1$，

经比较，知此时 $h(x)$在$[-2,2]$上的最大值为 $3a+3$.-------------12 分

③ 当$-1\leq\frac{a}{2}<0$，即$-2\leq a<0$ 时，结合图形可知 $h(x)$在$[-2，-1]$，$[-\frac{a}{2}，1]$上递减，

在$[-1，-\frac{a}{2}]$，$[1,2]$上递增，且 $h(-2)=3a+3$，$h(2)=a+3$，$h(-\frac{a}{2})=\frac{a^2}{4}+a+1$，

经比较，知此时 $h(x)$在$[-2,2]$上的最大值为 $a+3$.------------13 分

④ 当$-\frac{3}{2}\leq\frac{a}{2}<-1$，即$-3\leq a<-2$ 时，结合图形可知 $h(x)$在$[-2，\frac{a}{2}]$，$[1，-\frac{a}{2}]$上递减，

在$[\frac{a}{2}，1]$，$[-\frac{a}{2}，2]$上递增，且 $h(-2)=3a+3<0$，$h(2)=a+3\geq 0$，

经比较，知此时 $h(x)$在$[-2,2]$上的最大值为 $a+3$.---------------14 分

⑤ 当$\frac{a}{2}<-\frac{3}{2}$时，即 $a<-3$ 时，结合图形可知 $h(x)$在$[-2,1]$上递减，在$[1,2]$上递增，

故此时 $h(x)$在$[-2,2]$上的最大值为 $h(1)=0$.------------15 分

综上所述，当 $a\geq 0$ 时，$h(x)$在$[-2,2]$上的最大值为 $3a+3$；

当$-3\leq a<0$ 时，$h(x)$在$[-2,2]$上的最大值为 $a+3$；

当 $a<-3$ 时，$h(x)$在$[-2,2]$上的最大值为 0.-------------16 分