

仪征中学 2019 届数学一轮复习补偿训练(2) 9.18

班级_____学号_____姓名_____成绩_____

一、填空题：

1、若将函数 $y = \cos x - \sqrt{3} \sin x$ 的图象向左移 $m(m > 0)$ 个单位后，所得图象关于 y 轴对称，

则实数 m 的最小值为_____.

$$\frac{2\pi}{3}$$

2、函数 $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移 $\varphi\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 个单位后，所得函数图象关于原点

成中心对称，则 $\varphi =$ _____.

$$\frac{3\pi}{8}$$

3、已知圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ ，直线 $l: 4x - 3y + 15 = 0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点，

D 为圆 C 上异于 A, B 两点的任一点，则 $\triangle ABD$ 面积的最大值为_____.

$$27$$

4、已知函数 $f(x) = x|x-2|$ ，则不等式 $f(\sqrt{2}-x) \leq f(1)$ 的解集为_____.

$$[-1, +\infty)$$

5、已知直线 $l: mx + y + 3m - \sqrt{3} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 12$ 交于 A, B 两点，过 A, B 分别作 l 的垂线

与 x 轴交于 C, D 两点，若 $|AB| = 2\sqrt{3}$ ，则 $|CD| =$ _____.

$$4$$

6、已知点 $A(2, 3)$ ，点 $B(6, -3)$ ，点 P 在直线 $3x - 4y + 3 = 0$ 上，若满足等式

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} + 2\lambda = 0$ 的点 P 有两个，则实数 λ 的取值范围是_____.

$$(-\infty, 2)$$

二、解答题：

7、已知圆 $M: x^2 + y^2 - 2x + a = 0$

(1) 若 $a = -8$ ，过点 $P(4, 5)$ 作圆 M 的切线，求该切线方程；

(2) 若 AB 为圆 M 的任意一条直径，且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -6$ (O 为坐标原点)，求圆 M 的半径.

解：（1）若 $a = -8$ ，圆 $M: (x-1)^2 + y^2 = 9$ ，圆心 $M(1,0)$ ，半径为 3. ……2 分

若切线斜率不存在，圆心 M 到直线 $x=4$ 的距离为 3，

所以直线 $x=4$ 为圆 M 的一条切线； ………4 分

若切线斜率存在，设切线方程为： $y-5=k(x-4)$ ，化简为： $kx-y-4k+5=0$ ，则圆心到直线的距离 $\frac{|k-4k+5|}{\sqrt{k^2+1}}=3$ ，解得： $k=\frac{8}{15}$ 。

所以切线方程为 $x=4$ 或 $8x-15y+43=0$ ； ………7 分

（2）圆 M 的方程可化为 $(x-1)^2 + y^2 = 1-a$ ，圆心 $M(1,0)$ ，则 $OM=1$

设圆的半径 $r=\sqrt{1-a}(a<1)$ ………9 分

因为 AB 为圆 M 的任意一条直径，所以 $\vec{MA} = -\vec{MB}$ ，且 $|\vec{MA}| = |\vec{MB}| = r$ ，则

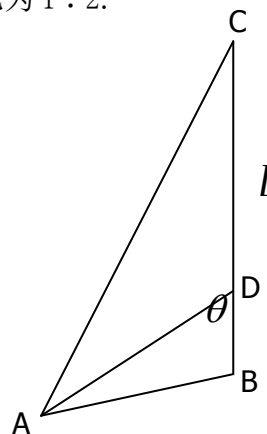
$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (\vec{OM} + \vec{MA}) \cdot (\vec{OM} + \vec{MB}) = (\vec{OM} - \vec{MB}) \cdot (\vec{OM} + \vec{MB}) = (\vec{OM})^2 - (\vec{MB})^2 = 1 - r^2 \cdots 12 \text{ 分}$$

又因为 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -6$ ，解得： $r = \sqrt{7}$ ，所以圆的半径为 $\sqrt{7}$ 。 ………14 分

8、如图，某市在海岛 A 上建了一水产养殖中心。在海岸线 l 上有相距 70 公里的 B、C 两个小镇，并且 $AB=30$ 公里， $AC=80$ 公里，已知 B 镇在养殖中心工作的员工有 3 百人，C 镇在养殖中心工作的员工有 5 百人。现欲在 BC 之间建一个码头 D，运送来自两镇的员工到养殖中心工作，又知水路运输与陆路运输每百人每公里运输成本之比为 1：2。

（1）求 $\sin \angle ABC$ 的大小；

（2）设 $\angle ADB = \theta$ ，试确定 θ 的大小，使得运输总成本最少。



解：（1）在 $\triangle ABC$ 中， $\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{900 + 4900 - 6400}{2 \times 30 \times 70} = -\frac{1}{7}$ ……3 分

所以 $\sin \angle ABC = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ ………5 分

(2) 在 $\triangle ABD$ 中, 由 $\frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{AB}{\sin \theta} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$ 得: $\frac{30}{\sin \theta} = \frac{AD}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = \frac{BD}{-\frac{1}{7}\sin \theta + \frac{4\sqrt{3}}{7}\cos \theta}$

所以 $AD = \frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}}{\sin \theta}$, $BD = \frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}\cos \theta - \frac{30}{7}\sin \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{30}{7}$ 9 分

设水路运输的每百人每公里的费用为 k 元, 陆路运输的每百人每公里的费用为 $2k$ 元,

则运输总费用 $y = (5CD + 3BD) \times 2k + 8 \times k \times AD = 2k[5(70 - BD) + 3BD + 4AD]$

$= 20k[35 - 2(\frac{\frac{12\sqrt{3}}{7}\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{3}{7}) + 4 \times \frac{\frac{12\sqrt{3}}{7}}{\sin \theta}] = 20k[35 + \frac{6}{7} + \frac{24\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{2 - \cos \theta}{\sin \theta}]$ 11 分

令 $H(\theta) = \frac{2 - \cos \theta}{\sin \theta}$, 则 $H'(\theta) = \frac{1 - 2\cos \theta}{\sin^2 \theta}$, 设 $H'(\theta) = 0$, 解得: $\cos \theta = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$

当 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 时, $H'(\theta) < 0, H(\theta)$ 单调减; 当 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $H'(\theta) > 0, H(\theta)$ 单调增

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ 时, $H(\theta)$ 取最小值, 同时 y 也取得最小值.14 分

此时 $BD = \frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{30}{7} = \frac{90}{7}$, 满足 $0 < \frac{90}{7} < 70$, 所以点 D 落在 BC 之间

所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, 运输总成本最小.

答: $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, 运输总成本最小.16 分