借解析几何平台 发展数学运算素养

◇ 北京 叶 欣

《普通高中数学课程标准(2017年版)》中对数学运算素养内涵的描述是:“数学运算是指在明晰运算对象的基础上,依据运算法则解决数学问题的素养.主要包括:理解运算对象,掌握运算法则,探究运算思路,选择运算方法,设计运算程序,求得运算结果等.”数学运算是一种思维活动,它将知识、方法、能力和态度融为一体,通过数学运算可以发展数学思维,同时培养严谨求实的科学精神.

数学运算素养是后天习得的.在教学中以数学知识为载体,通过对问题的不断思考,探讨最优运算途径,发展数学运算素养.在高中数学课程的学习中,对数学运算的要求主要是:在理解运算对象、掌握运算法则的基础上,能根据题目所给条件设计出更加合理、简捷的运算途径,从而迅速、准确、熟练地完成运算.

解析几何是用代数的方法研究几何问题,研究的基础是运算,运算对象主要是代数式与向量,因此解析几何是发展数学运算素养的有效载体.本文通过对几道解析几何问题的分析,探讨在解决解析几何问题中如何有目的地进行运算训练,提升数学思维能力,发展数学运算素养.

1 抓住几何特征,探究运算思路

例1 已知椭圆 W:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,且经过点 $C(2,\sqrt{3})$.

(1) 求椭圆 W 的方程及其长轴长;

(2) A,B 分别为椭圆 W 的左、右顶点,点 D 在椭圆 W 上,且位于 x 轴下方,直线 CD 交 x 轴于点 Q.若$\triangle ACQ$ 的面积比$\triangle BDQ$ 的面积大 $2\sqrt{3}$,求点 D 的坐标.

分析 本题第(2)问要利用两三角形面积的差解决问题,常规想法就是找到 D,Q 两点的坐标,再利用面积公式进行计算.入手点可以选择设点 D(或点 Q)的坐标,也可以选择设直线 CD 的方程,但这几种途径的运算量都不小.如图1所示,挖掘椭圆 W 的几何特征,注意到$\triangle AOC$ 是确定的,通过计算可得其面积为 $2\sqrt{3}$,所以点 Q 在线段 OB(不包括端点)上,且$\triangle OCQ$ 的面积等于$\triangle BDQ$ 的面积,进一步分析可得直线 OD 和直线 BC 的位置关系,并由此可以得到点 D 横、纵坐标间的关系,再利用椭圆 W 的方程就可以求出点 D 的坐标.

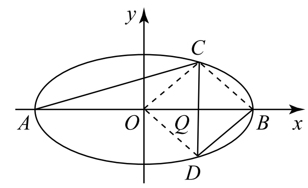

图1

解 (1)椭圆 W 的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$,长轴长 $2a=8$(求解过程略).

(2)因为点 D 在 x 轴下方,所以点 Q 在线段 AB(不包括端点)上.由(1)可知 $A(-4,0)$,$B(4,0)$,所以$\triangle AOC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$.因为$\triangle ACQ$ 的面积比$\triangle BDQ$ 的面积大 $2\sqrt{3}$,所以点 Q 在线段 OB(不包括端点)上,且$\triangle OCQ$ 的面积等于$\triangle BDQ$ 的面积,所以$\triangle OCB$ 的面积等于$\triangle BCD$ 的面积,故 $OD\parallel BC$.设点 $D(m,n)$,$n<0$,则$\frac{n}{m}=\frac{0-\sqrt{3}}{4-2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.又因为点 D 在椭圆 W 上,所以 $\frac{m^2}{16}+\frac{n^2}{4}=1$,所以$\begin{cases}m=2,\\n=-\sqrt{3}.\end{cases}$故点 D 的坐标为$(2,-\sqrt{3})$.

点评 通过数学运算解决问题的一个关键环节是探究运算思路,运算思路的形成要以数学推理为支撑,运算思路的探索过程是数学思维的训练过程.探究运算思路通常要对研究对象的几何特征进行分析.教学中可以通过对一些典型问题进行分析,训练学生从几何角度出发,认清问题中的几何对象有哪些,哪些是运动变化的、哪些是确定不变的;进而分析研究对象的几何特征是怎样的(主要关注的是单个研究对象的性质和不同研究对象间的位置关系、数量关系);然后将几何问题转化为代数问题,再实施代数运算.利用几何特征进行分析并由此探究运算思路的过程,正是培养学生思维的有力工具.

2 结合代数结构,选择运算方法

例2 (2021年全国乙卷理21)已知抛物线 C:$x^2=2py\ (p>0)$的焦点为 F,且 F 与圆 M:$x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为4.

(1)求 p;

(2)若点 P 在 M 上,PA,PB 是 C 的两条切线,A,B 是切点,求$\triangle PAB$ 面积的最大值.

分析 本题第(2)问首先要表示出$\triangle PAB$ 的面积,这就需要知道线段 AB 的长和点 P 到直线 AB 的

距离，解决问题的关键在于获得直线 AB 的方程.由于抛物线方程可以转化为二次函数，因此可以借助导数的知识解决问题.又因为表示出的两条切线 PA，PB 的方程必然有相同的代数结构，所以可以直接得到直线 AB 的方程，从而使问题迎刃而解.

解 (1)因为抛物线 C 的焦点为 $F(0,\frac{p}{2})$，且 $|FM|=\frac{p}{2}+4$，所以点 F 与圆 M：$x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为 $\frac{p}{2}+4-1=4$，解得 $p=2$.

(2)由(1)知抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$，即 $y=\frac{x^2}{4}$，故 $y'=\frac{x}{2}$.设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，直线 PA 的方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $x_1x-2y_1-2y=0$.同理可得直线 PB 的方程为 $x_2x-2y_2-2y=0$，故 A，B 两点的坐标满足方程 $x_0x-2y-2y_0=0$，故直线 AB 的方程为 $x_0x-2y-2y_0=0$.联立 $\begin{cases}x_0x-2y-2y_0=0,\\ y=\frac{x^2}{4},\end{cases}$ 得 $x^2-2x_0x+4y_0=0$.依题意知 $\Delta>0$，所以由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=4y_0$，所以

$$|AB|=\sqrt{1+(\frac{x_0}{2})^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+(\frac{x_0}{2})^2}\cdot\sqrt{4x_0^2-16y_0}=\sqrt{(x_0^2+4)(x_0^2-4y_0)}.$$

因为点 P 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}$，所以

$$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{(x_0^2+4)(x_0^2-4y_0)}\cdot\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}=\frac{1}{2}(x_0^2-4y_0)^{\frac{3}{2}}.$$

因为

$$x_0^2-4y_0=1-(y_0+4)^2-4y_0=-(y_0+6)^2+21,$$

而 $-5\leqslant y_0\leqslant-3$，所以当 $y_0=-5$ 时，$\triangle PAB$ 的面积取得最大值 $\frac{1}{2}\times20^{\frac{3}{2}}=20\sqrt{5}$.

点评 解析几何是高中数学“几何与代数”主线中的重要内容.坐标系是沟通几何与代数的桥梁，可以将几何问题的特征用代数的语言描述，使之转化为代数问题，再通过代数式的运算解决问题.在解析几何中，有些问题的未知量多，因此引入的参数也比较多，有效开展数学运算的关键往往是对式子结构深入观察，抓住其代数结构特征，有目的地实施运算，这也是思维能力的一种体现.

3 引入向量对象，设计运算途径

例 3 (2017年浙江卷21)如图2所示，已知抛物线 $x^2=y$，点 $A(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$，$B(\frac{3}{2},\frac{9}{4})$，抛物线上的点 $P(x,y)(-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2})$.过点 B 作直线 AP 的垂线，垂足为 Q.

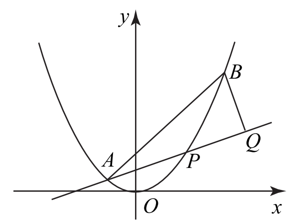

图 2

(1) 求直线 AP 斜率的取值范围；

(2) 求 $|PA|\cdot|PQ|$ 的最大值.

分析 对于第(2)问，如果用两点间距离公式计算线段长度，那么需要知道 A，P，Q 三点的坐标.联立直线 AP 与 BQ 的方程可得出点 Q 的坐标，进而分别求出 $|PA|=\sqrt{1+k^2}\cdot(k+1)$ 和 $|PQ|=-\frac{(k-1)(k+1)^2}{\sqrt{k^2+1}}$($k$ 为直线 AP 的斜率)，相乘得到

$$|PA|\cdot|PQ|=-(k-1)(k+1)^3,$$

最后再求得最大值，这是一种常规的思路，但运算量较大.若注意到 A，P，Q 三点共线，则可由向量的数量积运算得到 $|PA|\cdot|PQ|=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QP}$，从而将实数运算转化为向量运算.

解 (1)设直线 AP 的斜率为 k，则 $k=x-\frac{1}{2}$.因为 $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，所以 $k\in(-1,1)$.

(2)连接 BP，设 $P(x,x^2)(-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2})$，因为 A，P，Q 三点共线且 $AP\perp QB$，所以

$$|PA|\cdot|PQ|=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{BP})=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BP}.$$

又因为 $\overrightarrow{PA}=(-\frac{1}{2}-x,\frac{1}{4}-x^2)$，$\overrightarrow{BP}=(x-\frac{3}{2},x^2-\frac{9}{4})$，所以 $|PA|\cdot|PQ|=-x^4+\frac{3}{2}x^2+x+\frac{3}{16}$.令 $f(x)=-x^4+\frac{3}{2}x^2+x+\frac{3}{16}(-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2})$，则

$$f'(x)=-(x-1)(2x+1)^2.$$

表 1

x	$(-\frac{1}{2},1)$	1	$(1,\frac{3}{2})$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递增↑	$\frac{27}{16}$	单调递减↓

故当 $x=1$ 时，$|PA|\cdot|PQ|$ 取得最大值 $\frac{27}{16}$.

点评 向量是数学中较为基本且重要的数学运算对象之一，向量法是研究问题的基本思想方法.在解析几何中遇到距离和角度等问题时，可以根据题目条件引入向量进行运算.本题通过引入向量将线段长度的乘积问题转化为两个“已知”向量的数量积，不但避开了求点 Q 的坐标，而且减少了运算量.

在教学中，尤其是高三的总复习，教师会更多地关注解题思路，认为只要思路对了学生就能做对题.对于经常出现的“会而不对”现象，教师和学生通常会认为是因为马虎而出错，没有深入探究错误的根源.事实上，有些运算错误可能是由运算法则使用不当引起的，比如去分母时常常出现只在方程一边乘公分母的现象，对于这种现象可以通过帮助学生掌握运算法则的方式避免；有些运算错误则是在动笔之前没有认真探究运算思路，未能选择恰当的运算方法，或者弄不清运算程序造成的.因此教学中，教师在分析解题思路的同时要设计运算途径，并在解题结束后要对比不同运算途径产生的结果，帮助学生积累根据不同条件选择不同运算方法的经验，并逐步内化自己的认知结构，理解运算的内涵，这是促进学生思维发展的途径之一.

数学运算素养是数学核心素养之一，既包含了数学运算能力，也涵盖了情感、态度和价值观，因此教师要重视对学生的数学运算素养进行培养.在学习知识和应用知识解决问题的过程中，通过对条件深入分析，帮助学生明确运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，选择运算方法，这个过程体现了对学生的数学思维进行灵活性、深刻性和创新性的培养.在实施运算的过程中，让学生对结果进行检验并纠正运算中的错误，以此培养学生锲而不舍、一丝不苟和严谨求实的科学精神.解析几何教学是培养学生数学思维、情感、态度和价值观的阵地之一，教学中教师要选择典型问题，引导学生讨论与思辨，培养学生在解决问题后进行反思的习惯，助力学生发展数学运算素养.

（作者单位：北京工业大学附属中学）

立足基础 注重综合 考查素养

——赏析2020年全国Ⅰ卷理科第11题

◇ 江西 黄贤锋

2019 年 11 月，教育部考试中心研制的《中国高考评价体系》从高考的核心功能、考查内容、考查要求三个方面回答“为什么考”“考什么”“怎么考”等重要问题，提出了“一核四层四翼”的总体要求.本文从一题多解的角度赏析 2020 年全国Ⅰ卷理科第 11 题，挖掘出高考立足基础、注重综合、考查素养的特点，并针对这一特点，提出两点教学建议.

1 真题呈现

题目 已知⊙M：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线 l：$2x+y+2=0$，P 为 l 上的动点，过点 P 作⊙M 的切线 PA，PB，切点分别为 A，B，当 $|PM|\cdot|AB|$ 最小时，直线 AB 的方程为（　　）.

A. $2x-y-1=0$

B. $2x+y-1=0$

C. $2x-y+1=0$

D. $2x+y+1=0$

试题以直线与圆为背景，考查了直线与圆的方程、直线与圆的位置关系、弦长公式、点到直线的距离公式等基础知识，充分体现了试题立足基础的特点.试题涉及动点、动线，从多角度考查学生观察、思考、发现、分析和解决问题的能力，着力考查学生转化与化归、数形结合等数学思想，充分体现了试题注重综合的特点.同时，试题很好地考查了学生逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现了高考考查素养的命题导向.

2 解法赏析

试题存在两个难点：其一，如何确定点 P 的位置；其二，在确定点 P 后，如何确定直线 AB 的方程.下面从这两个难点入手，赏析试题的解法.

2.1 确定点 P 的位置

函数思想是处理最值问题的常见思想，注意到 $|PM|$，$|AB|$ 都是变量，如何将 $|PM|\cdot|AB|$ 转变成单一变量的函数成为解题的难点.