

江苏省仪征中学 2019 届高三考前数学热身练 7

一. 填空题

1. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 的实轴长为_____.

2. Read a, b

$i \leftarrow 1$

While $i \leq 2$

$a \leftarrow a + b$

$b \leftarrow a - b$

$i \leftarrow i + 1$

End While

Print a

执行如图所示的伪代码, 当输入 a, b 的值分别为 1, 3 时, 最后输出的 a 的值为_____.

3. 则 " $|\theta - \frac{\pi}{12}| < \frac{\pi}{12}$ " 是 " $\sin \theta < \frac{1}{2}$ " 的_____.

4. 甲、乙两人下棋, 若甲获胜的概率为 $\frac{1}{5}$, 甲、乙下成和棋的概率为 $\frac{2}{5}$, 则乙不输棋的概率为_____.

5. $y = \frac{(8t^2 + 2)(16t^2 + 1)}{(8t^2 + 1)^2}$ 的最大值是_____.

6. 已知公差为 2 的等差数列 $\{a_n\}$ 及公比为 2 的等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 + b_1 > 0$, $a_2 + b_2 < 0$, 则 $a_3 + b_3$ 的取值范围是_____.

7. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2^x + \ln \frac{x}{4}$, 记 $a_n = f(n-5)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项和为_____.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 A, B 分别为 x 轴, y 轴上一点, 且 $AB=2$, 若点 $P(2, \sqrt{5})$, 则 $|\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{OP}|$ 的取值范围是_____.

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x| + 2, & x < 1 \\ x + \frac{2}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$, 设 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq |\frac{x}{2} + a|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围是_____.

10. 数 x_1, x_2, y_1, y_2 满足 $x_1^2 + y_1^2 = 1, x_2^2 + y_2^2 = 1, x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值是_____.

二. 解答题

11. 圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 $F(-c, 0)$, 右顶点为 A , 点 E 的坐标为 $(0, c)$, $\triangle EFA$ 的面积为 $\frac{b^2}{2}$.

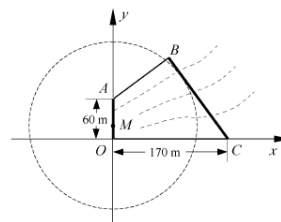
(I) 求椭圆的离心率;

(II) 设点 Q 在线段 AE 上, $|FQ| = \frac{3}{2}c$, 延长线段 FQ 与椭圆交于点 P , 点 M, N 在 x 轴上, $PM \parallel QN$, 且直线 PM 与直线 QN 间的距离为 c , 四边形 $PQNM$ 的面积为 $3c$.

(i) 求直线 FP 的斜率; (ii) 求椭圆的方程.

- 12 如图，为保护河上古桥 OA ，规划建一座新桥 BC ，同时设立一个圆形保护区．规划要求：新桥 BC 与河岸 AB 垂直；保护区的边界为圆心 M 在线段 OA 上并与 BC 相切的圆，且古桥两端 O 和 A 到该圆上任意一点的距离均不少于 80m ．经测量，点 A 位于点 O 正北方向 60m 处，点 C 位于点 O 正东方向 170m 处(OC 为河岸)， $\tan \angle BCO = \frac{4}{3}$ ．

- (1) 求新桥 BC 的长；
 (2) 当 OM 多长时，圆形保护区的面积最大？



附加

1. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 向量 $\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ y \end{bmatrix}$, x, y 为实数, 若 $A\alpha = B\alpha$, 求 x, y 的值.

2. 地到乙地要经过 3 个十字路口, 设各路口信号灯工作相互独立, 且在各路口遇到红灯的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

- (1) 设 X 表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;
- (2) 若有 2 辆车独立地从甲地到乙地, 求这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率.

参考答案

1. $2\sqrt{2}$ 解析: 双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 的实轴长为 $2a = 2\sqrt{2}$. 本题主要考查双曲线标准方程及实轴长等基础知识. 本题属于容易题.

2. 5

3. 充分而不必要条件

4. $\frac{4}{5}$ 解析: 乙不输棋就是甲没有获胜, 则所求的概率为 $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. 本题考查了对立事件的概率. 本题属于容易题.

5. $\frac{9}{4}$

6. $(-\infty, -2)$ 解析: 设 $a_1 = x, b_1 = y$, 则 $x + y > 0, x + 2y + 2 < 0, a_3 + b_3 = x + 4y + 4$, 利用线性规划可求得 $a_3 + b_3$ 的取值范围是 $(-\infty, -2)$. 本题考查了等差数列、等比数列的通项公式以及利用线性规划的方法求最值. 本题属于容易题.

7. -16 解析: 数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项: $a_1 = f(-4), a_2 = f(-3), a_3 = f(-2), a_4 = f(-1), a_5 = f(0), a_6 = f(1), a_7 = f(2), a_8 = f(3)$, 又 $f(-x) = -f(x), f(-x) + f(x) = 0$, 即前 8 项和为 $f(-4) = -f(4) = -16$. 本题考查了函数的奇偶性, 函数求值. 本题属于容易题.

8. $[7, 11]$ 解析: 设 $A(x, 0), B(0, y), |\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{OP}| = |(6-x, 3\sqrt{5}-y)| = \sqrt{85-6(2x+\sqrt{5}y)}$, 由题知 $x^2 + y^2 = 4$, 设 $x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta, |\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{OP}| = \sqrt{85-12(2\cos\theta + \sqrt{5}\sin\theta)} = \sqrt{85-36\sin(\theta+\varphi)}$, 则 $|\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{OP}|$ 的取值范围是 $[7, 11]$. 本题考查了向量坐标运算、求模以及三角代换等内容, 本题属于中等题.

9. 【分析】根据题意, 作出函数 $f(x)$ 的图象, 令 $g(x) = \left|\frac{x+a}{2}\right|$, 分析 $g(x)$ 的图象特点, 将

不等式 $f(x) \geq \left|\frac{x+a}{2}\right|$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立转化为函数 $f(x)$ 的图象在 $g(x)$ 上的上方或相交的问题,

分析可得 $f(0) \geq g(0)$, 即 $2 \geq |a|$, 解可得 a 的取值范围, 即可得答案.

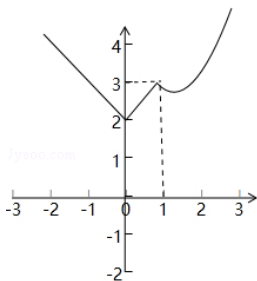
【解答】解: 根据题意, 函数 $f(x) = \begin{cases} |x|+2, & x < 1 \\ x+\frac{2}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$ 的图象如图:

令 $g(x) = \left|\frac{x+a}{2}\right|$, 其图象与 x 轴相交与点 $(-2a, 0)$,

在区间 $(-\infty, -2a)$ 上为减函数, 在 $(-2a, +\infty)$ 为增函数,

若不等式 $f(x) \geq \left|\frac{x+a}{2}\right|$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立, 则函数 $f(x)$ 的图象在

$g(x)$ 上的上方或相交, 则必有 $f(0) \geq g(0)$, 即 $2 \geq |a|$, 解可得 $-2 \leq a \leq 2$,



【点评】本题考查分段函数的应用, 关键是作出函数 $f(x)$ 的图象, 将函数的恒成立问题转化为图象的上下位置关系.

10. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

11. 【分析】(I) 设椭圆的离心率为 e . 通过 $\frac{1}{2}(c+a)c = \frac{b^2}{2}$. 转化求解椭圆的离心率.

(II) (i) 依题意, 设直线 FP 的方程为 $x=my - c$ ($m>0$), 则直线 FP 的斜率为 $\frac{1}{m}$. 通过 $a=2c$, 可得直线 AE 的方程为 $\frac{x}{2c} + \frac{y}{c} = 1$, 求解点 Q 的坐标为 $(\frac{(2m-2)c}{m+2}, \frac{3c}{m+2})$. 利用 $|FQ| = \frac{3c}{2}$, 求出 m , 然后求解直线 FP 的斜率.

(ii) 求出椭圆方程的表达式你, 求出直线 FP 的方程为 $3x - 4y + 3c = 0$, 与椭圆方程联立通过 $|FP| = \sqrt{(c+c)^2 + (\frac{3c}{2})^2} = \frac{5c}{2}$, 结合直线 PM 和 QN 都垂直于直线 FP . 结合四边形 $PQNM$ 的面积为 $3c$, 求解 c , 然后求椭圆的方程.

【解答】解: (I) 设椭圆的离心率为 e . 由已知, 可得 $\frac{1}{2}(c+a)c = \frac{b^2}{2}$. 又由 $b^2 = a^2 - c^2$, 可得 $2c^2 + ac - a^2 = 0$, 即 $2e^2 + e - 1 = 0$. 又因为 $0 < e < 1$, 解得 $e = \frac{1}{2}$.

所以, 椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$;

(II) (i) 依题意, 设直线 FP 的方程为 $x=my - c$ ($m>0$), 则直线 FP 的斜率为 $\frac{1}{m}$.

由 (I) 知 $a=2c$, 可得直线 AE 的方程为 $\frac{x}{2c} + \frac{y}{c} = 1$, 即 $x+2y - 2c=0$, 与直线 FP 的方程联立, 可解得 $x = \frac{(2m-2)c}{m+2}$, $y = \frac{3c}{m+2}$, 即点 Q 的坐标为 $(\frac{(2m-2)c}{m+2}, \frac{3c}{m+2})$.

由已知 $|FQ| = \frac{3c}{2}$, 有 $[\frac{(2m-2)c}{m+2} + c]^2 + (\frac{3c}{m+2})^2 = (\frac{3c}{2})^2$, 整理得 $3m^2 - 4m = 0$, 所以 $m = \frac{4}{3}$, 即直线 FP 的斜率为 $\frac{3}{4}$.

(ii) 解: 由 $a=2c$, 可得 $b = \sqrt{3}c$, 故椭圆方程可以表示为 $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$.

由 (i) 得直线 FP 的方程为 $3x - 4y + 3c = 0$, 与椭圆方程联立 $\begin{cases} 3x - 4y + 3c = 0 \\ \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1 \end{cases}$ 消去 y , 整理得 $7x^2 + 6cx - 13c^2 = 0$, 解得 $x = -\frac{13c}{7}$ (舍去), 或 $x = c$. 因此可得点 $P(c, \frac{3c}{2})$, 进而可得

$|FP| = \sqrt{(c+c)^2 + (\frac{3c}{2})^2} = \frac{5c}{2}$, 所以 $|PQ| = |FP| - |FQ| = \frac{5c}{2} - \frac{3c}{2} = c$. 由已知, 线段 PQ 的长即

为 PM 与 QN 这两条平行直线间的距离，故直线 PM 和 QN 都垂直于直线 FP.

因为 $QN \perp FP$ ，所以 $|QN| = |FQ| \cdot \tan \angle QFN = \frac{3c}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9c}{8}$ ，所以 $i \div FQN$ 的面积为 $\frac{1}{2} |FQ| |QN| = \frac{27c^2}{32}$ ，同理 $i \div FPM$ 的面积等于 $\frac{75c^2}{32}$ ，由四边形 PQNM 的面积为 $3c$ ，得 $\frac{75c^2}{32} - \frac{27c^2}{32} = 3c$ ，整理得 $c^2 = 2c$ ，又由 $c > 0$ ，得 $c = 2$.

所以，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

【点评】 本题考查椭圆的方程的求法，直线与椭圆的位置关系的综合应用，考查转化思想以及计算能力.

解：解法一：

(1) 如图，以 O 为坐标原点， OC 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系 xOy .

由条件知 $A(0, 60)$ ， $C(170, 0)$ ，直线 BC 的斜率

$$k_{BC} = -\tan \angle BCO = -\frac{4}{3}.$$

又因为 $AB \perp BC$ ，所以直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{3}{4}$. 设点 B 的坐标为 (a, b) ,

$$\text{则 } k_{BC} = \frac{b-0}{a-170} = -\frac{4}{3}, \quad k_{AB} = \frac{b-60}{a-0} = \frac{3}{4}, \quad \text{解得 } a=80, b=120.$$

所以 $BC = \sqrt{(170-80)^2 + (0-120)^2} = 150$. 因此新桥 BC 的长是 150 m.

(2) 设保护区的边界圆 M 的半径为 r m, $OM = d$ m, $(0 \leq d \leq 60)$.

由条件知，直线 BC 的方程为 $y = -\frac{4}{3}(x-170)$ ，即 $4x + 3y - 680 = 0$ ，

由于圆 M 与直线 BC 相切，故点 $M(0, d)$ 到直线 BC 的距离是 r ，即 $r = \frac{|3d - 680|}{5} = \frac{680 - 3d}{5}$.

因为 O 和 A 到圆 M 上任意一点的距离均不少于 80 m，

$$\text{所以 } \begin{cases} r - d \geq 80 \\ r - (60 - d) \geq 80 \end{cases}, \quad \text{即 } \begin{cases} \frac{680 - 3d}{5} - d \geq 80 \\ \frac{680 - 3d}{5} - (60 - d) \geq 80 \end{cases}, \quad \text{解得 } 10 \leq d \leq 35.$$

故当 $d=10$ 时， $r = \frac{680 - 3d}{5}$ 最大，即圆面积最大. 所以当 $OM = 10$ m 时，圆形保护区的面积最大.

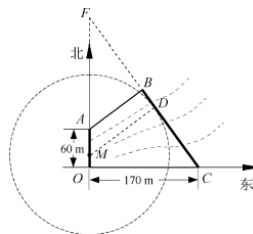
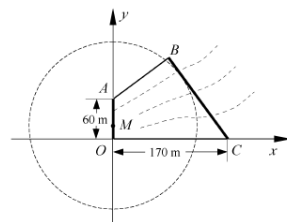
解法二：

(1) 如图，延长 OA , CB 交于点 F . 因为 $\tan \angle BCO = \frac{4}{3}$. 所以 $\sin \angle FCO = \frac{4}{5}$, $\cos$

$$\angle FCO = \frac{3}{5}.$$

因为 $OA=60, OC=170$ ，所以 $OF = OC \tan \angle FCO = \frac{680}{3}$. $CF = \frac{OC}{\cos \angle FCO} = \frac{850}{3}$ ，

从而 $AF = OF - OA = \frac{500}{3}$. 因为 $OA \perp OC$ ，所以 $\cos \angle AFB = \sin \angle FCO = \frac{4}{5}$ ，又因为 AB



$\perp BC$, 所以 $BF=AF \cos \angle AFB = \frac{400}{3}$, 从而 $BC=CF-BF=150$. 因此新桥 BC 的长是 150 m.

(2) 设保护区的边界圆 M 与 BC 的切点为 D , 连接 MD , 则 $MD \perp BC$, 且 MD 是圆 M 的半径, 并设 $MD=r$ m,

$OM=d$ m ($0 \leq d \leq 60$). 因为 $OA \perp OC$, 所以 $\sin \angle CFO = \cos \angle FCO$,

故由 (1) 知, $\sin \angle CFO = \frac{MD}{MF} = \frac{MD}{OF-OM} = \frac{r}{\frac{680}{3}-d} = \frac{3}{5}$ 所以 $r = \frac{680-3d}{5}$.

因为 O 和 A 到圆 M 上任意一点的距离均不少于 80 m,

所以 $\begin{cases} r-d \geq 80 \\ r-(60-d) \geq 80 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} \frac{680-3d}{5}-d \geq 80 \\ \frac{680-3d}{5}-(60-d) \geq 80 \end{cases}$, 解得 $10 \leq d \leq 35$,

故当 $d=10$ 时, $r = \frac{680-3d}{5}$ 最大, 即圆面积最大. 所以当 $OM=10$ m 时, 圆形保护区的面积最大.

附加

1. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 向量 $\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ y \end{bmatrix}$, x, y 为实数, 若 $A\alpha = B\alpha$, 求 x, y 的值.

解: $A\alpha = \begin{bmatrix} 2y-2 \\ 2+xy \end{bmatrix}$, $B\alpha = \begin{bmatrix} 2+y \\ 4-y \end{bmatrix}$, 由 $A\alpha = B\alpha$ 得 $\begin{cases} 2y-2=2+y \\ 2+xy=4-y \end{cases}$, 解得 $x = -\frac{1}{2}, y = 4$.

2. 地到乙地要经过 3 个十字路口, 设各路口信号灯工作相互独立, 且在各路口遇到红灯的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

(1) 设 X 表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;

(2) 若有 2 辆车独立地从甲地到乙地, 求这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率.

解: (1) 随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3. $P(X=0) = (1-\frac{1}{2}) \times (1-\frac{1}{3}) \times (1-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$,

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times (1-\frac{1}{3}) \times (1-\frac{1}{4}) + (1-\frac{1}{2}) \times \frac{1}{3} \times (1-\frac{1}{4}) + (1-\frac{1}{2}) \times (1-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} = \frac{11}{24},$$

$$P(X=2) = (1-\frac{1}{2}) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times (1-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times (1-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}, \quad P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

所以, 随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{11}{24} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{24} = \frac{13}{12}$.

(2) 设 Y 表示第一辆车遇到红灯的个数, Z 表示第二辆车遇到红灯的个数, 则所求事件的概率为

$$P(Y+Z=1) = P(Y=0, Z=1) + P(Y=1, Z=0) = P(Y=0)P(Z=1) + P(Y=1)P(Z=0)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{11}{24} + \frac{11}{24} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{48}.$$

所以, 这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率为 $\frac{11}{48}$.